

ParMeS User Guide

ParMeS Development team

February 27, 2014

Part I

Introduction

Part II

Operators

1 About operators

2 Computational operators

2.1 Correction de vitesse pour la modélisation d'un écoulement incompressible dans une boîte

Lors de la résolution de l'équation de Poisson $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \omega$, le mode 0 des transformées de Fourier rapides de la vitesse est imposé à 0, ce qui entraîne une modification des valeurs moyennes des composantes de la vitesse et donc des composantes de la vitesse elles-mêmes lorsque la transformée de Fourier inverse est appliquée. Une correction de la vitesse est donc nécessaire après la résolution de l'équation de Poisson, à chaque itération.

On introduit la notation suivante pour exprimer la vitesse corrigée :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse en sortie de FFT et où $\bar{\mathbf{u}}$ dénote la moyenne en espace de la vitesse, que l'on cherche ici à déterminer. L'écoulement s'effectue dans la direction x et la vitesse est initialisée en posant $\mathbf{u}(t=0) = (u_x, u_y, u_z) = (u_\infty, 0, 0)$.

$\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent $\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} = 0$. Ainsi le champ de vorticité moyen en espace est donné en 2D par :

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (2)$$

et en 3D par :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\overline{\omega_y} = -\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} \quad (4)$$

$$\overline{\omega_z} = -\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (5)$$

La correction de la vitesse se fait par réajustement du débit à l'entrée du domaine de calcul. Cette correction est développée ci-dessous composante par composante tout d'abord en 2D puis sera étendue au cas 3D.

2D

Correction de u_x :

On note B le coté correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{u_x} dy \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + L_y \overline{u_x} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \overline{u_x} = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y} \quad (8)$$

où L_y dénote la longueur du coté B . Or le débit que l'on souhaite imposer à l'entrée du domaine est égal à $u_\infty L_y$ et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u_x} + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \quad (9)$$

Correction de u_y :

$\overline{u_y}$ est un flux invariant en y .

En effet, la vitesse est à divergence nulle, donc la moyenne en espace de la vitesse l'est également et ainsi $\partial_x \overline{u_x} + \partial_y \overline{u_y} = 0$. Or $\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent on a bien $\partial_y \overline{u_y} = 0$ (invariance de $\overline{u_y}$ en y).

$\overline{u_y}$ est donc un flux variant en x et d'après la relation 2 on a $\overline{u_y} = \overline{\omega_x} + c$, avec c une constante. Ainsi :

$$\underbrace{\int_B u_y dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_y} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{\omega_x} dy + \int_B c dy \quad (10)$$

Or ici le débit souhaité est égal a 0. Donc :

$$0 = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_y dy}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega} x_0 L_y + L_y c \quad (11)$$

$$\Longleftrightarrow c = -\frac{\text{débit calculé}}{L_y} - \bar{\omega} x_0 \quad (12)$$

et donc :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u}_y + \bar{\omega} x - \bar{\omega} x_0 - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \quad (13)$$

où x_0 dénote la coordonnée dans la direction x du bord d'entrée du domaine de calcul.

3D

Correction de u_x :

On note S la surface correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\iint_S u_x dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}_{\text{débit calculé}} + \iint_S \bar{u}_x dydz \quad (14)$$

$$\Longleftrightarrow \bar{u}_x = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} \quad (15)$$

et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u}_x + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z}} \quad (16)$$

Correction de u_y :

D'après la relation 5 on a $\bar{u}_y = \bar{\omega}_z x + c$ avec c une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_y = \widetilde{u}_y + \bar{\omega}_z x + c$. Ainsi,

$$\iint_S u_y dydz = \iint_S \widetilde{u}_y dydz + \iint_S \bar{\omega}_z x dydz + \iint_S c dydz \quad (17)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\iint_S u_y dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_y dydz}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega}_z x_0 L_y L_z + c L_y L_z \quad (18)$$

où x_0 désigne la coordonnée dans la direction x de la surface d'entrée S du domaine de calcul.

$$\text{Donc } c = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \bar{\omega}_z x_0$$

Or le débit souhaité est égal a 0, par conséquent :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u}_y + \bar{\omega}_z x - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \bar{\omega}_z x_0} \quad (19)$$

Correction de u_z :

Sur le même principe on a d'après la relation 4 que $\overline{u_z} = -\overline{\omega_y}x + c$ avec c une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}x + c$. Ainsi en procédant de même que pour u_y on obtient :

$$u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}x - \frac{\iint \widetilde{u_z} dydz}{L_y L_z} + \overline{\omega_y} x_0 \quad (20)$$

Remarque :

Dans le cadre d'un écoulement autour d'un cylindre (2D) ou d'une sphère (3D), on peut également choisir l'écoulement potentiel comme condition initiale de l'écoulement.

Par décomposition de Helmholtz on a:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \quad (21)$$

où la fonction courant ψ et le potentiel scalaire ϕ vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{div}(\psi) = 0, \quad \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (22)$$

Donc si l'écoulement est potentiel, c'est à dire irrotationnel, alors :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (23)$$

et en 2D, la fonction courant et le potentiel scalaire sont liés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

Ainsi $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

La fonction courant associée à un écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre de rayon R est exprimée de la façon suivante :

$$\psi = u_\infty y \left(1 + \frac{R^2}{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \right) \quad (25)$$

avec (x_C, y_C) les coordonnées du centre du cylindre dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 8, est désormais donnée par :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = [\psi]_B = \left[u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{(x_0 - x_C)^2 - (y - y_C)^2} \right) \right]_B \quad (26)$$

En 3D, il est pratique d'exprimer le potentiel d'un écoulement autour d'une sphère de rayon R dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , dans lequel l'angle dans la direction azimutale θ est mesuré à partir de la direction de l'écoulement. Dans ce système de coordonnées, le potentiel est indépendant de l'angle méridional φ et est donné par :

$$\phi_{\text{sph}} = u_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (27)$$

Ainsi, les composantes de la vitesse en coordonnées sphériques sont les suivantes:

$$\mathbf{u}_{\text{sph}} = \nabla \phi_{\text{sph}} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \quad (28)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (29)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -u_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (30)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (31)$$

$$(32)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, le potentiel est donc donné par :

$$\phi_{\text{cart}} = u_\infty x \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (33)$$

où $x = r \cos \theta$ et $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$, avec (x_S, y_S, z_S) les coordonnées du centre de la sphère dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Les composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\mathbf{u}_{\text{cart}} = \nabla \phi_{\text{cart}} = (u_x, u_y, u_z) \quad (34)$$

$$u_x = u_\infty \left(1 - \frac{3R^3 x^2}{2r^5} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (35)$$

$$u_y = -u_\infty \frac{3R^3 xy}{2r^5} \quad (36)$$

$$u_z = -u_\infty \frac{3R^3 xz}{2r^5} \quad (37)$$

3 Monitors

3.1 Introduction

3.2 Printer

3.3 DragAndLift

3.4 Reprojection_criterion

Purpose : compute a projection criterion, depending on the current vorticity value on the grid.

IN : vorticity field, reproj_cst

OUT : reprojRate, projCriterion with:

reprojRate : how often (in terms of iterations) this criteria must be taken into account
and checkCriterion : true if reprojRate must be checked and updated (if necessary).

- Case 1: checkCriterion == True.
If checkCriterion is true, the operator computes a criterion projection every reprojRate iteration. If this criterion is greater than reproj_cst (user defined constant), then reprojRate is set to 1. reprojRate is reset to defaultRate (user-defined) at the beginning of every apply.
- Case 2 : checkCriterion = False.
The operator does nothing but giving the (user-defined) value for reprojRate.

If `io_params` is set, then a file is appended with some diagnostics values (see below) each repro-
jRate iterations.

Ω being the whole domain, ω the vorticity field, let us denote :

$$d1 = \max_{\Omega} \left| \sum_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \right| \quad (38)$$

$$d2 = \max_{\Omega} \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right| \quad \forall i, j \in [0, 2] \quad (39)$$

And so, `diagnostics = simulation.time, projCriterion, d1, d2, counter`

`counter` being the number of projection done since the beginning of the simulation.

3.5 Energy_enstrophy

4 Redistribute operators