

Définition du pas de temps dans les méthodes semi-lagrangiennes

Cette étude a pour but de déterminer un critère précis pour le choix du pas de temps dans la résolution des équations de Navier-Stokes basée sur une méthode semi-lagrangienne.

1 Les facteurs influant sur la valeur du pas de temps

Dans cette étude, le pas de temps est adaptatif et calculé de la façon suivante :

$$\Delta t_{\text{adapt}} = \min(\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{stretch}}, \Delta t_{\text{clf}})$$

avec :

- $\Delta t_{\text{adv}} = \frac{\text{LCFL}}{f(\nabla \mathbf{u})}$ ou $\Delta t_{\text{adv}} = \frac{\text{LCFL}}{f(\boldsymbol{\omega})}$, $0 < \text{LCFL} \leq 1$
- $\Delta t_{\text{stretch}} = \frac{\text{cste RK}}{\max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} \left| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right|}$
- $\Delta t_{\text{clf}} = \frac{\text{CFL} \cdot h}{\max_{1 \leq i \leq 3} |\mathbf{u}_i|}$, $0 < \text{CFL} \leq 1$

Remarque : on sait que $|\nabla \mathbf{u}|_{\infty} \leq \frac{2|\mathbf{u}|_{\infty}}{h}$, donc $\frac{1}{\max |\nabla \mathbf{u}|_{\infty}} \geq \frac{h}{2|\mathbf{u}|_{\infty}}$. Par conséquent on a :

$$\Delta t_{\text{adv}} \geq \frac{\text{LCFL}}{2} \Delta t_{\text{clf}}$$

Les différents facteurs à prendre en compte pour la définition du pas de temps sont les suivants:

1.1 Le schéma de splitting pour l'advection

- splitting de Strang:

$\text{advec}X(\omega_x, \Delta t/2)$
 $\text{advec}Y(\omega_y, \Delta t/2)$
 $\text{advec}Z(\omega_z, \Delta t)$
 $\text{advec}Y(\omega_y, \Delta t/2)$
 $\text{advec}X(\omega_x, \Delta t/2)$

- splitting d'ordre 1:

$\text{advec}X(\omega_x, \Delta t)$
 $\text{advec}Y(\omega_y, \Delta t)$
 $\text{advec}Z(\omega_z, \Delta t)$

- splitting d'ordre 1 avec sous-cyclage et ré-évaluation de la vitesse à chaque fin de sous-cycle:

$i = 1$

while $i \leq nbSubsteps$:

$advecX(\omega_x, \Delta t)$

$advecY(\omega_y, \Delta t)$

$advecZ(\omega_z, \Delta t)$

$\Delta \mathbf{u} = -\nabla \omega$

$i \leftarrow i + 1$

end while

1.2 Le critère de stabilité pour l'advection

Avec les méthodes vortex, la stabilité du schéma d'advection peut-être garantie en définissant le pas de temps de l'une des 3 façons suivantes :

- $\Delta t_{adv} \leq \frac{LCFL}{\max_{1 \leq i \leq 3} |\omega_i|} = \frac{LCFL}{|\omega|_\infty}$ (plus facile à implémenter mais souvent plus restrictif)
- $\Delta t_{adv} \leq \frac{LCFL}{\max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq i \leq 3} |S_{ij}|}$ où S représente le tenseur des déformations, défini par $S = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$
- $\Delta t_{adv} \leq \frac{LCFL}{\max_{1 \leq i \leq 3} \left| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|}$

1.3 La projection de la vorticité dans l'espace des champs   divergence nulle

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{sol} + \omega_{irr} = \omega_{sol} + \nabla \pi \\ \omega_{sol} &= \tilde{\omega} - \nabla \pi\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{FFT}} \widehat{\omega'}_k = \widehat{\omega}_k - \xi_k \frac{\sum_{j=1}^3 \xi_j \widehat{\omega}_j}{|\xi|^2}, \quad 1 \leq k \leq 3$$

- sans projection
- avec projection toutes les 10 itérations
- avec projection   toutes les itérations

1.4 Le noyau de remaillage

- $\Lambda_{4,2}$ (anciennement M'_6)

$$M'_6 = \Lambda_{4,2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{35}{12}|x|^3 + \frac{21}{4}|x|^4 - \frac{25}{12}|x|^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + \frac{75}{4}|x| - \frac{245}{8}|x|^2 + \frac{545}{24}|x|^3 - \frac{63}{8}|x|^4 + \frac{25}{24}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 18 - \frac{153}{4}|x| + \frac{255}{8}|x|^2 - \frac{313}{24}|x|^3 + \frac{21}{8}|x|^4 - \frac{5}{24}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

- $\Lambda_{6,4}$

$$\Lambda_{6,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{3521}{144}|x|^5 + \frac{12029}{144}|x|^6 - \frac{15617}{144}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{1015}{72}|x|^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{877}{5} + \frac{72583}{60}|x| - \frac{145467}{40}|x|^2 + \frac{18809}{3}|x|^3 - \frac{54663}{8}|x|^4 + \frac{390327}{80}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 8695 - \frac{656131}{20}|x| + \frac{3938809}{72}|x|^2 - \frac{158725}{3}|x|^3 + \frac{2354569}{72}|x|^4 - \frac{9644621}{720}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ + \frac{523589}{144}|x|^6 - \frac{454097}{720}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{203}{72}|x|^9 & 3 \leq |x| < 4 \\ -\frac{142528}{5} + \frac{375344}{5}|x| - \frac{3942344}{45}|x|^2 + \frac{178394}{3}|x|^3 - \frac{931315}{36}|x|^4 + \frac{5385983}{720}|x|^5 & |x| \geq 4 \\ 0 & \end{cases} \quad (2)$$

• $\Lambda_{8,4}$

$$\Lambda_{8,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{205}{144}x^2 + \frac{91}{192}x^4 - \frac{6181}{320}x^5 + \frac{6337}{96}x^6 - \frac{2745}{32}x^7 + \frac{28909}{576}x^8 - \frac{3569}{320}x^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -154 + \frac{12757}{12}x - \frac{230123}{72}x^2 + \frac{264481}{48}x^3 - \frac{576499}{96}x^4 + \frac{686147}{160}x^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ -\frac{96277}{48}x^6 + \frac{14221}{24}x^7 - \frac{28909}{288}x^8 + \frac{3569}{480}x^9 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{68776}{7} - \frac{1038011}{28}x + \frac{31157515}{504}x^2 - \frac{956669}{16}x^3 + \frac{3548009}{96}x^4 - \frac{2422263}{160}x^5 & 3 \leq |x| < 4 \\ + \frac{197255}{48}x^6 - \frac{19959}{28}x^7 + \frac{144545}{2016}x^8 - \frac{3569}{1120}x^9 & 4 \leq |x| < 5 \\ -56375 + \frac{8314091}{56}x - \frac{49901303}{288}x^2 + \frac{3763529}{32}x^3 - \frac{19648027}{384}x^4 + \frac{9469163}{640}x^5 & |x| \geq 5 \\ -\frac{545977}{192}x^6 + \frac{156927}{448}x^7 - \frac{28909}{1152}x^8 + \frac{3569}{4480}x^9 & \\ \frac{439375}{7} - \frac{64188125}{504}x + \frac{231125375}{2016}x^2 - \frac{17306975}{288}x^3 + \frac{7761805}{384}x^4 - \frac{2895587}{640}x^5 & \\ + \frac{129391}{192}x^6 - \frac{259715}{4032}x^7 + \frac{28909}{8064}x^8 - \frac{3569}{40320}x^9 & \end{cases} \quad (3)$$

2 Etude comparative basée sur le Benchmark de Taylor Green

Le but de cette étude est de déterminer l'influence de chacun des 4 facteurs cités dans la section précédente sur la valeur du pas de temps adaptatif au cours de la simulation. Les paramètres choisis pour chacune des simulations présentées dans cette étude sont les suivants :

- $\text{res} = 256^3$, $\Omega = [0, 2\pi]^3$
- $\text{LCFL} = 0.125$, $\text{CFL} = 0.5$
- $\text{cste RK} = \text{cste RK3} = 2.5127$

2.1 Influence du schéma de splitting

noyau de remaillage : $\Lambda_{4,2}$, projection : aucune, critère pour stabilité de l'advection : $\Delta t_{\text{adv}} \leq \frac{\text{LCFL}}{\max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq i \leq 3} |S_{ij}|}$

2.2 Influence du choix du critère de stabilité pour l'advection

noyau de remaillage : $\Lambda_{4,2}$, projection : aucune, schéma de splitting : Strang

2.3 Influence de la projection

noyau de remaillage : $\Lambda_{4,2}$, critère pour stabilité de l'advection : $\Delta t_{\text{adv}} \leq \frac{\text{LCFL}}{\max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq i \leq 3} |S_{ij}|}$, schéma de splitting : Strang

2.4 Influence du noyau de remaillage

projection : aucune, critère pour stabilité de l'advection : $\Delta t_{\text{adv}} \leq \frac{\text{LCFL}}{\max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{1 \leq i \leq 3} |S_{ij}|}$, schéma de splitting : Strang

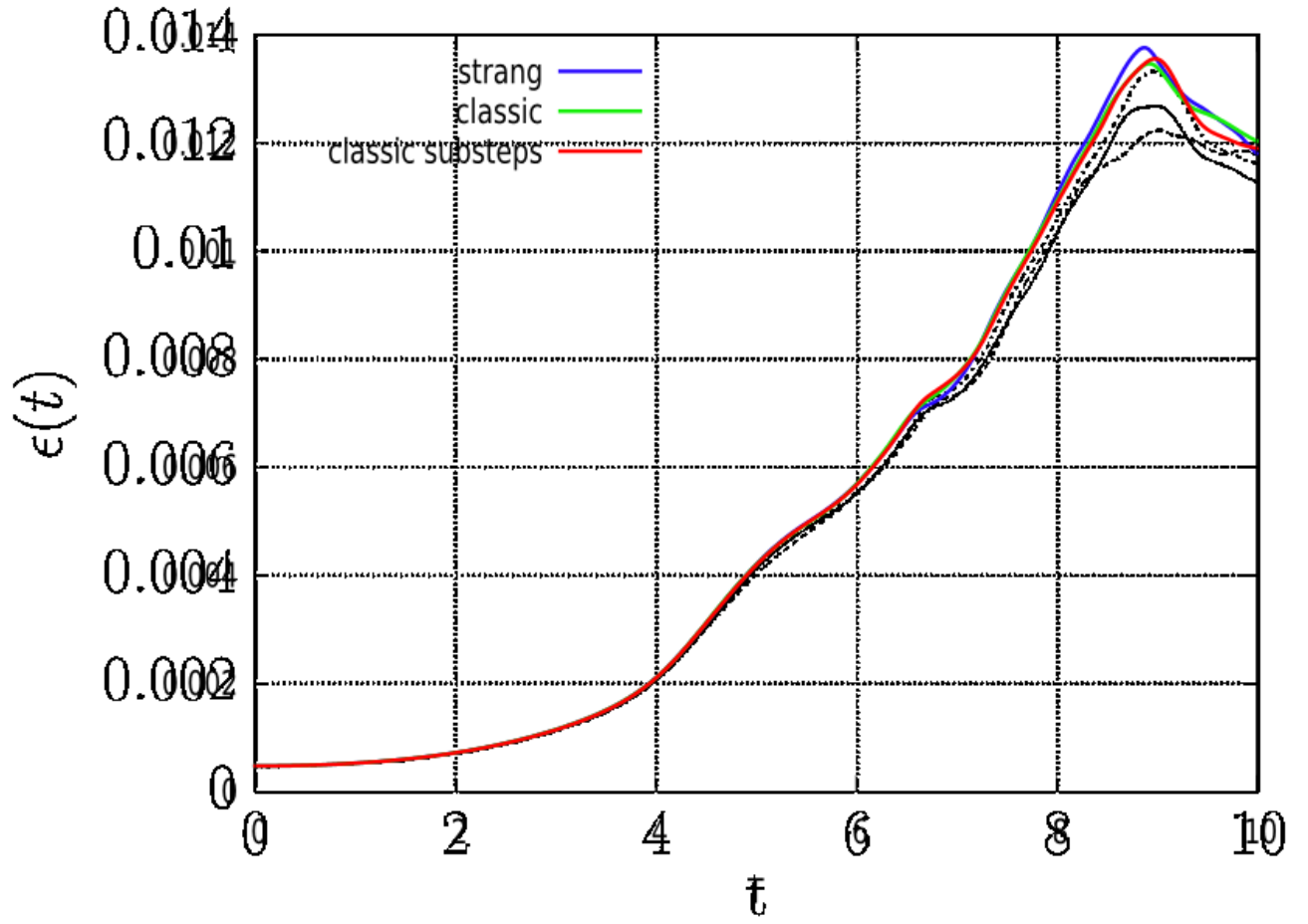


Figure 1: **Influence splitting.** Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'entropie.

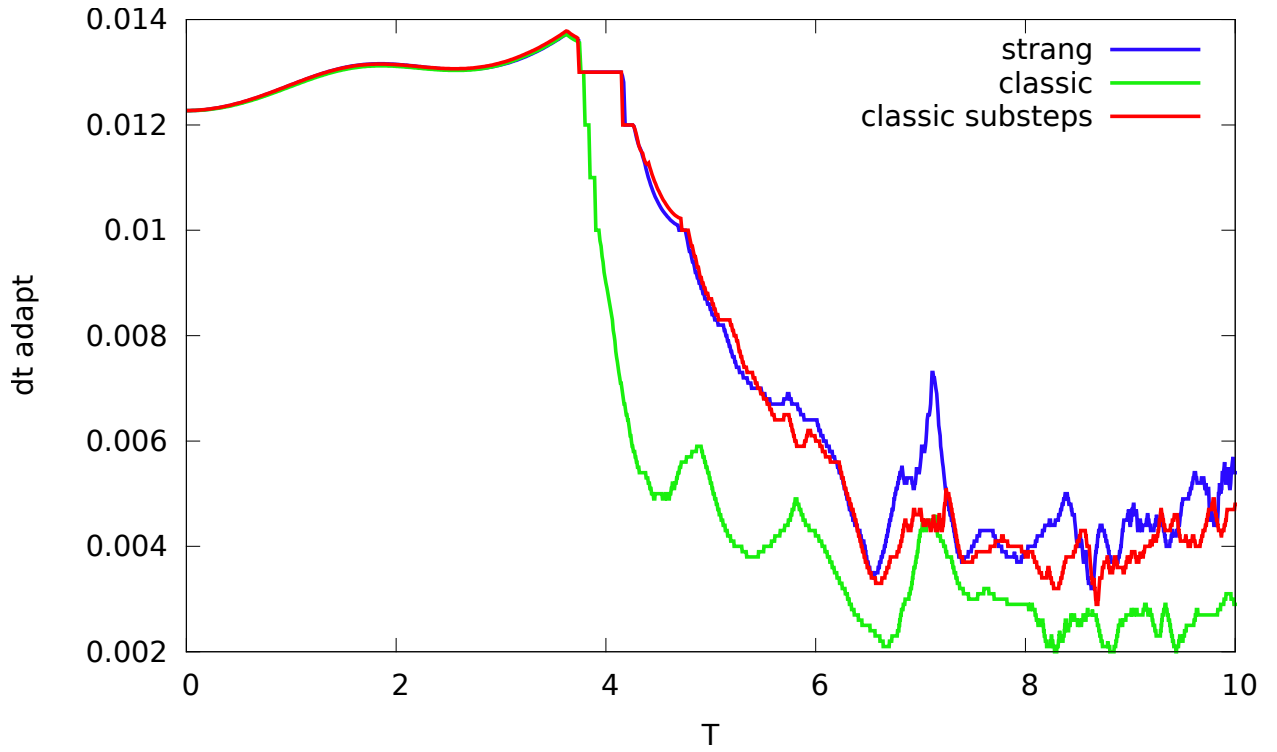


Figure 2: **Influence splitting.** Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.

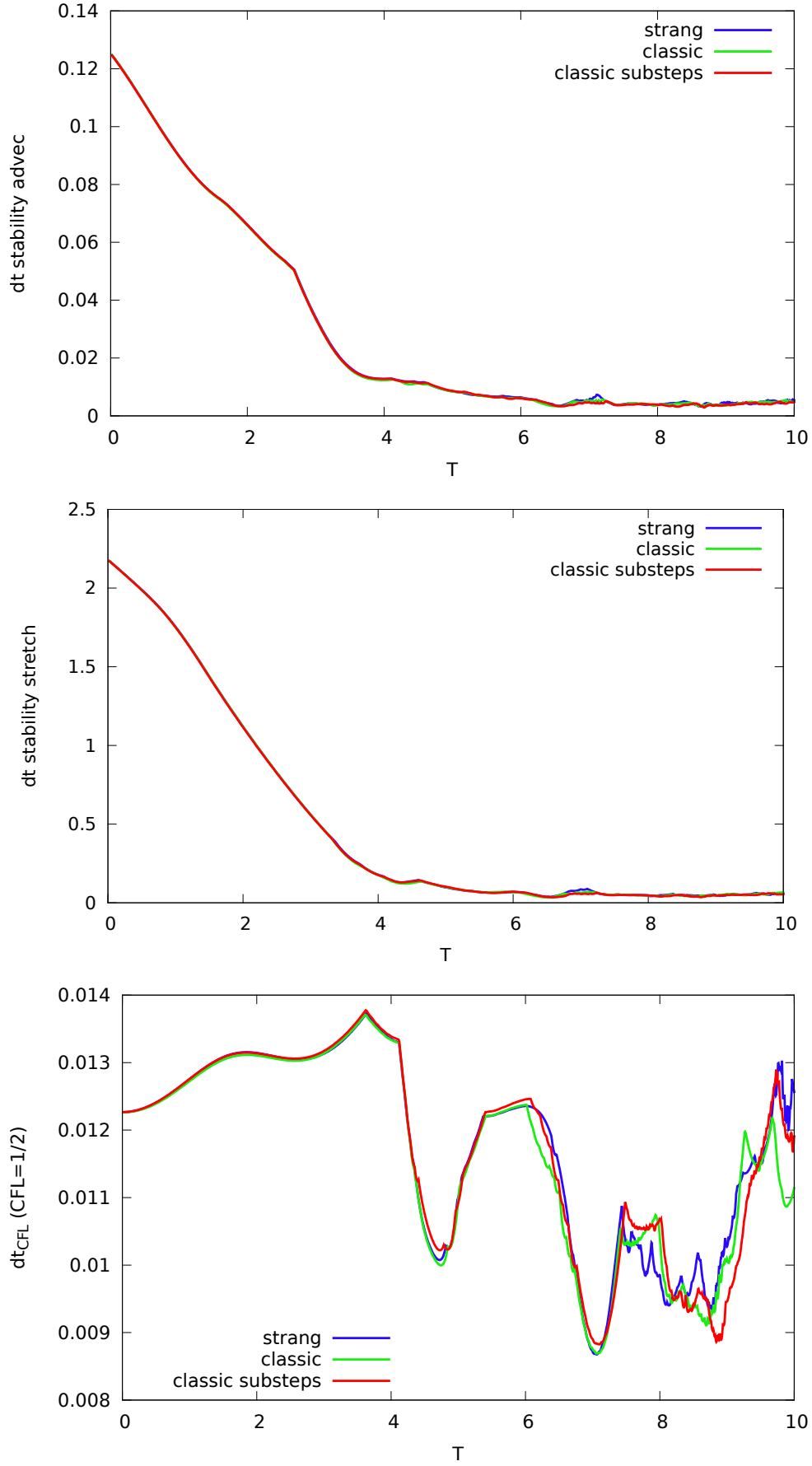


Figure 3: **Influence splitting.** Evolution de Δt_{adv} (haut), $\Delta t_{stretch}$ (centre) et Δt_{cfl} (bas) au cours de la simulation.

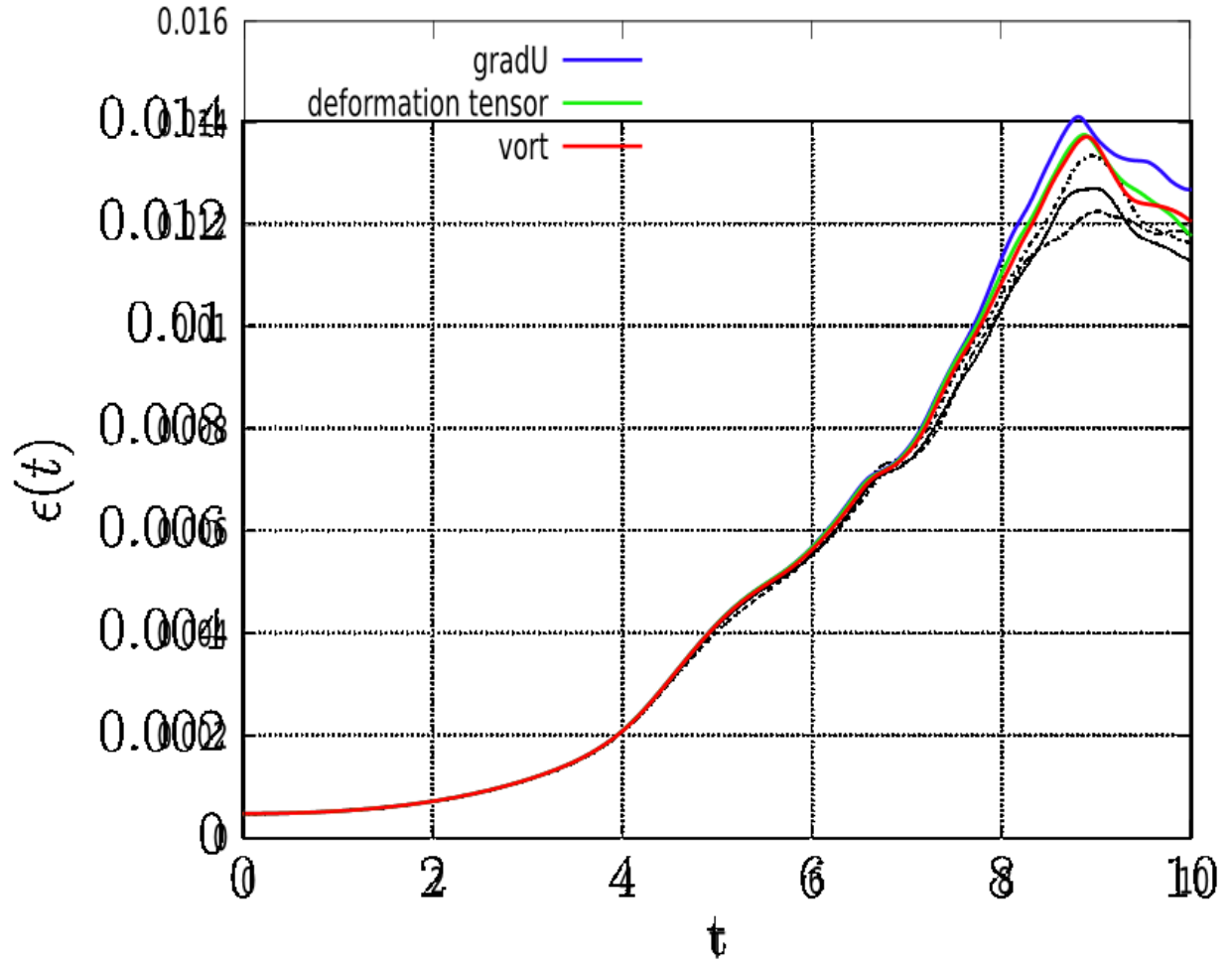


Figure 4: **Influence** Δt_{adv} . Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'ensrophie.

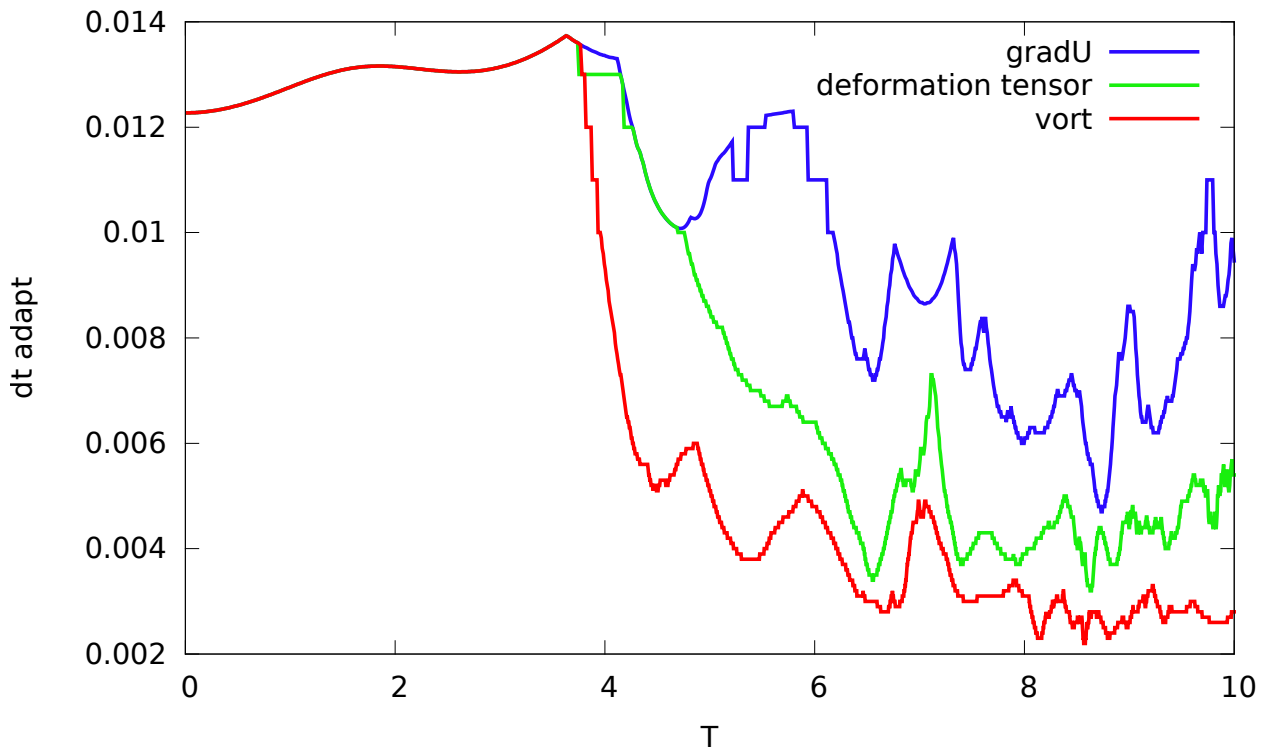


Figure 5: **Influence** Δt_{adv} . Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.

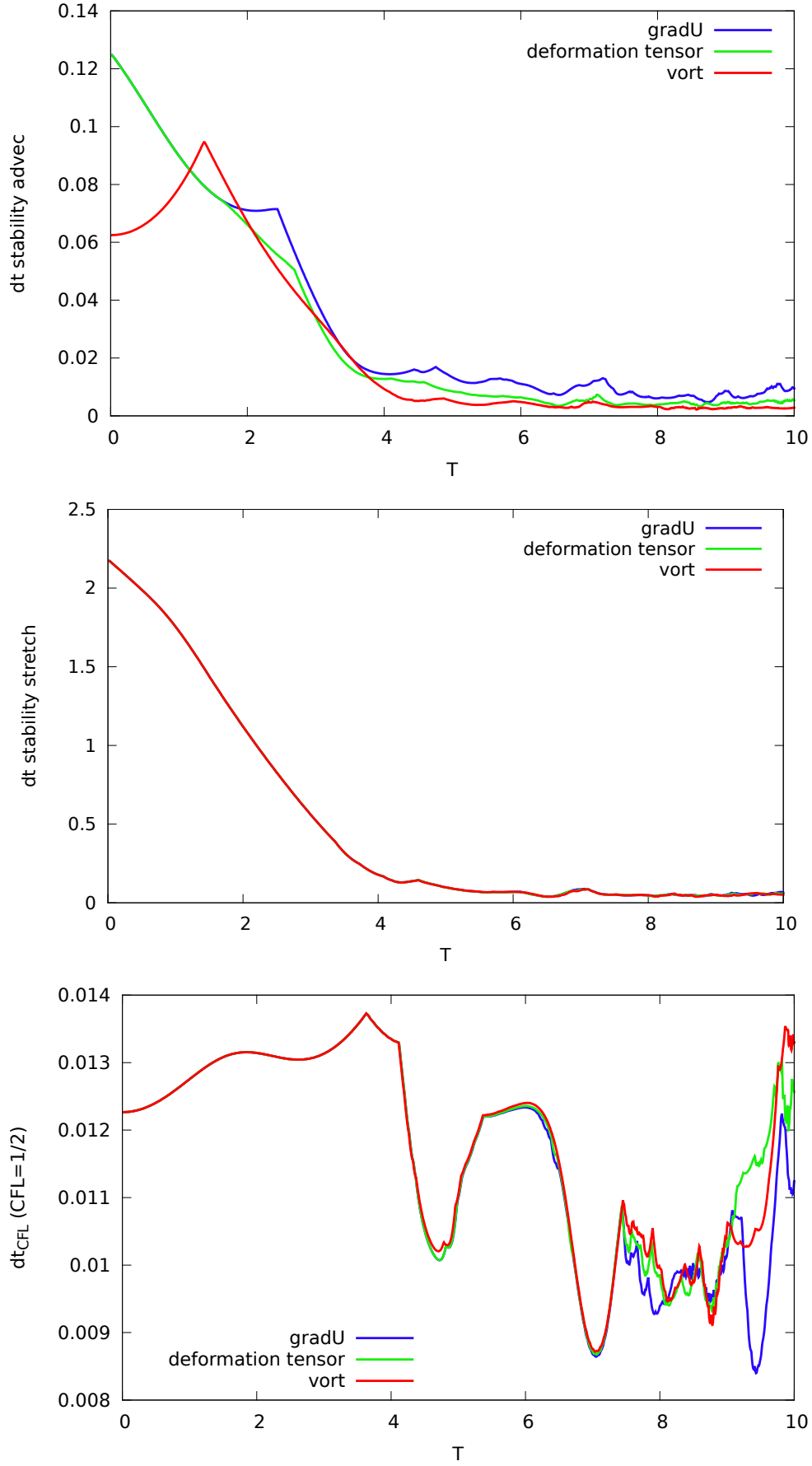
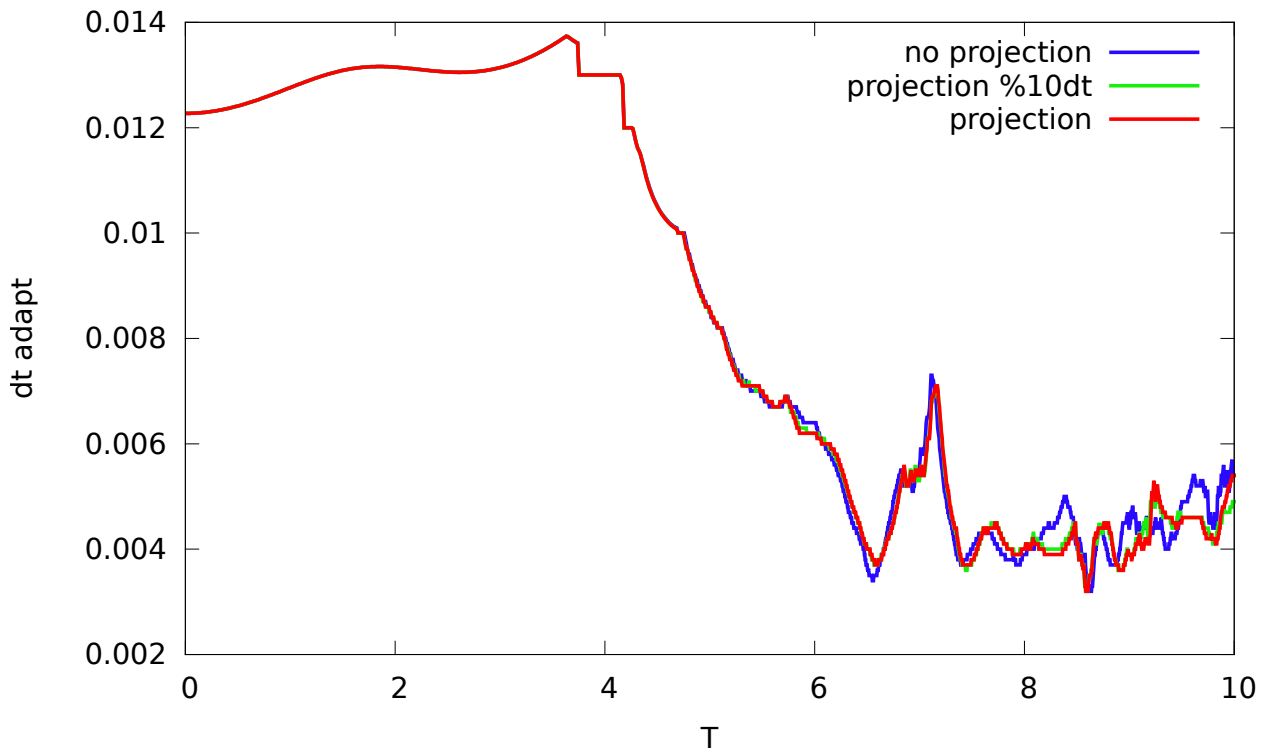
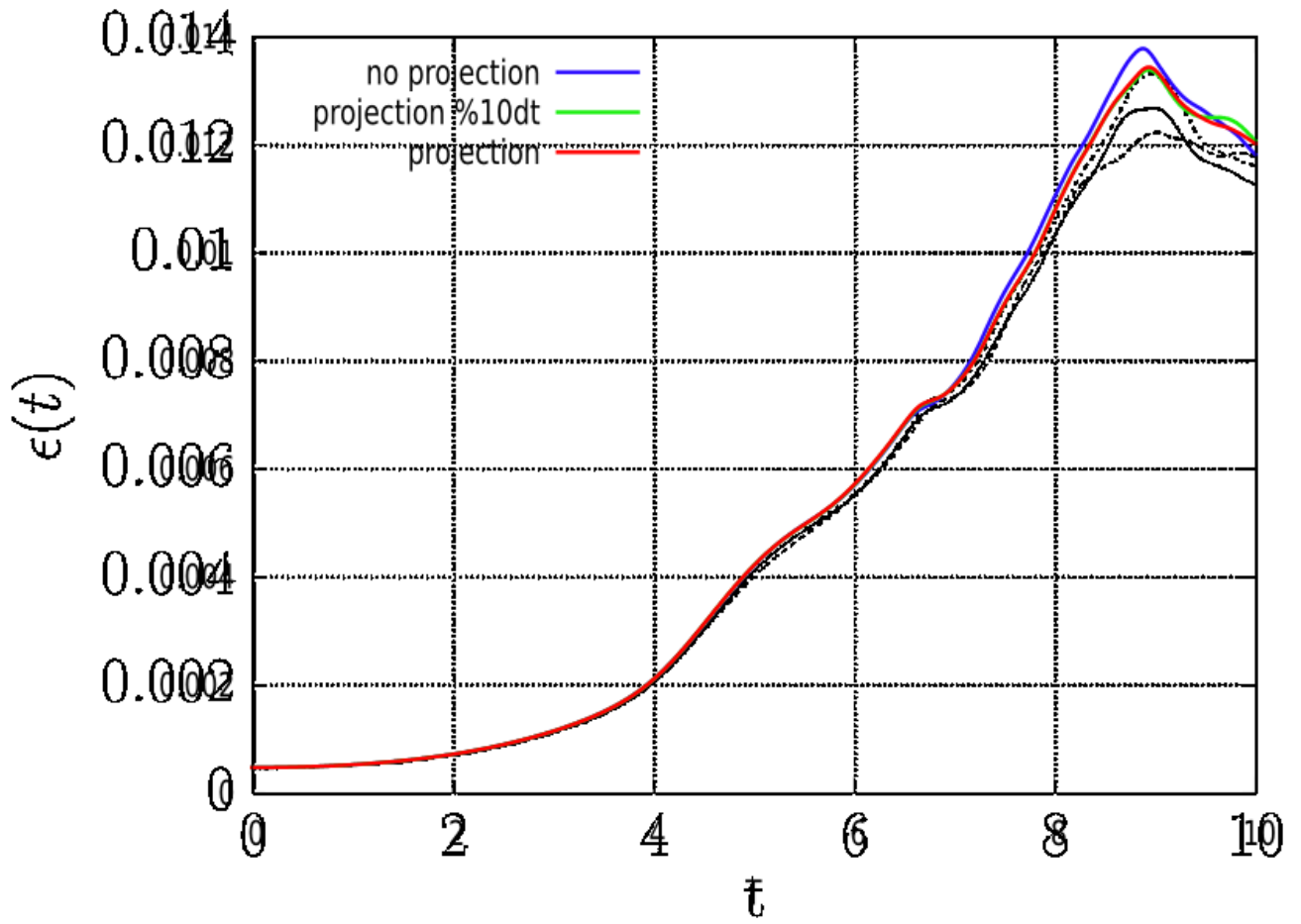


Figure 6: **Influence** Δt_{adv} . Evolution de Δt_{adv} (haut), $\Delta t_{\text{stretch}}$ (centre) et Δt_{cfl} (bas) au cours de la simulation.



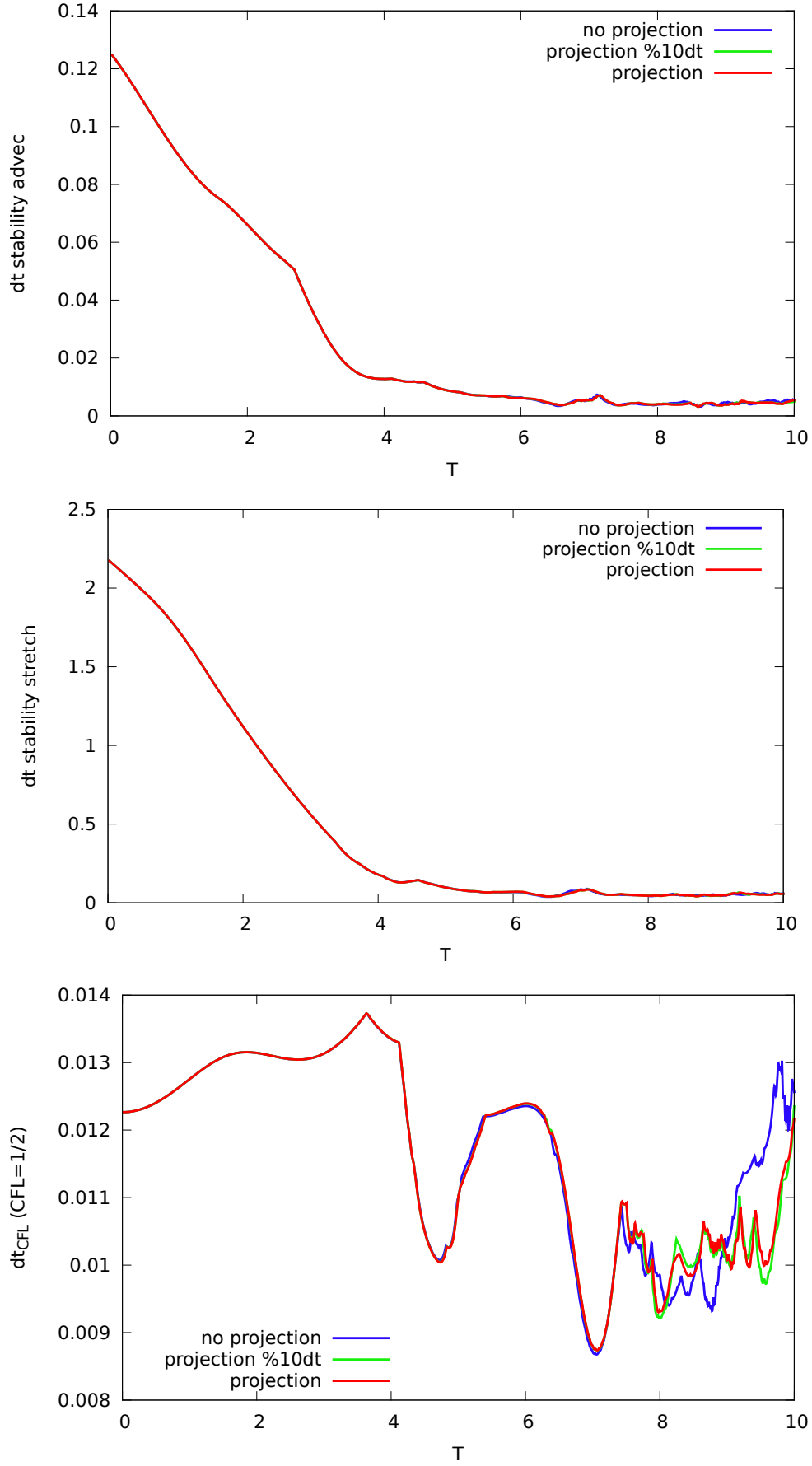


Figure 9: **Influence projection.** Evolution de Δt_{adv} (haut), $\Delta t_{\text{stretch}}$ (centre) et Δt_{cfl} (bas) au cours de la simulation.

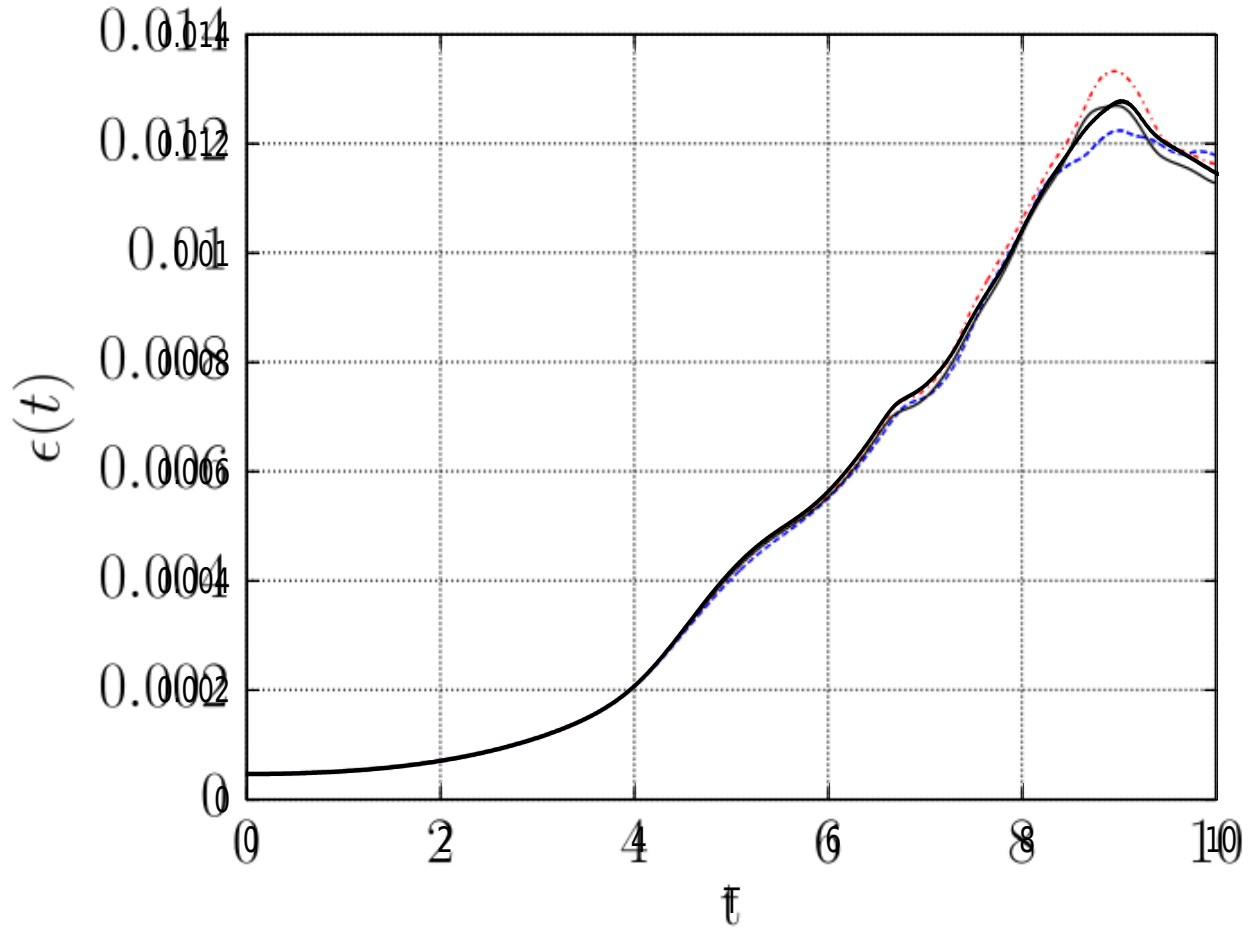


Figure 10: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt + tenseur déformation pour Δt_{adv} .** Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'ensrophie.

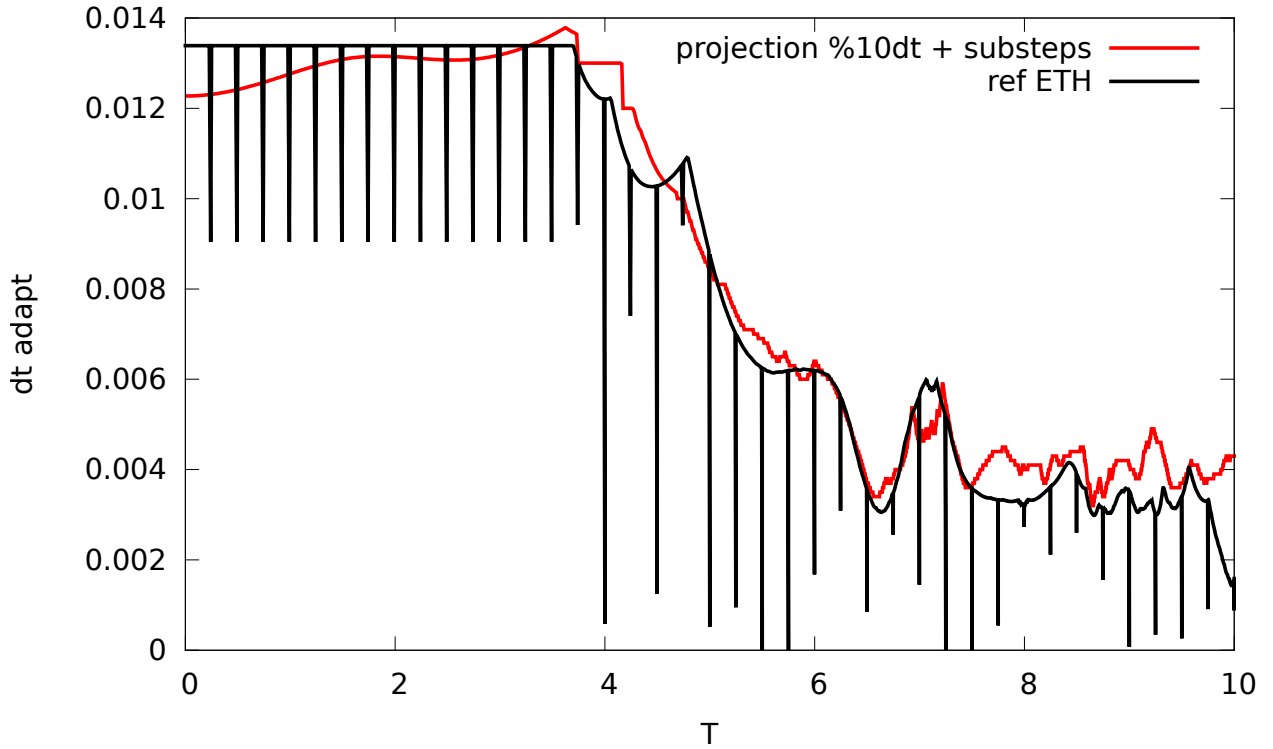


Figure 11: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt + tenseur déformation pour Δt_{adv} .** Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.

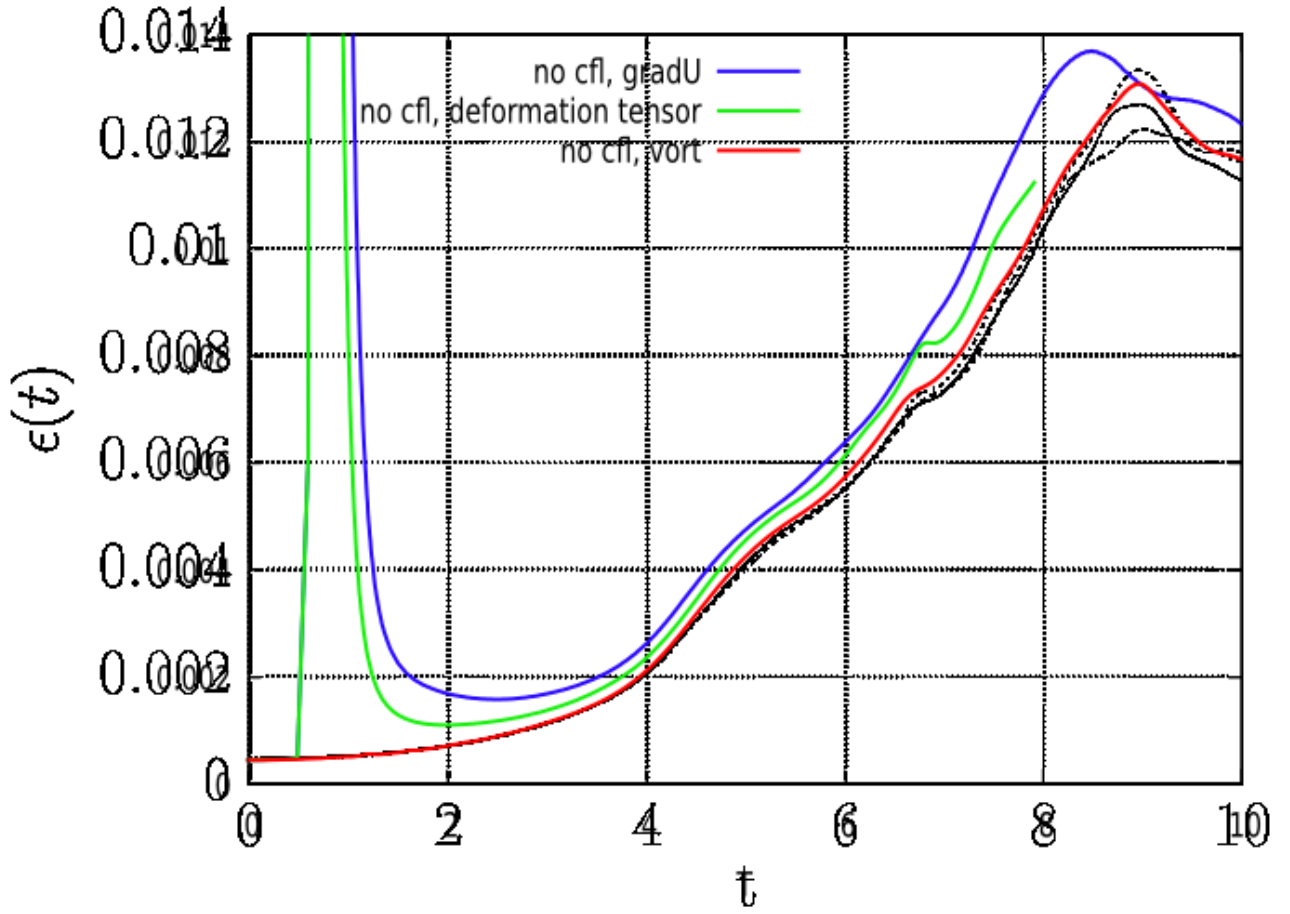


Figure 12: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt .** $\Delta t_{\text{adapt}} = \min(\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{stretch}})$. Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'ensrophie.

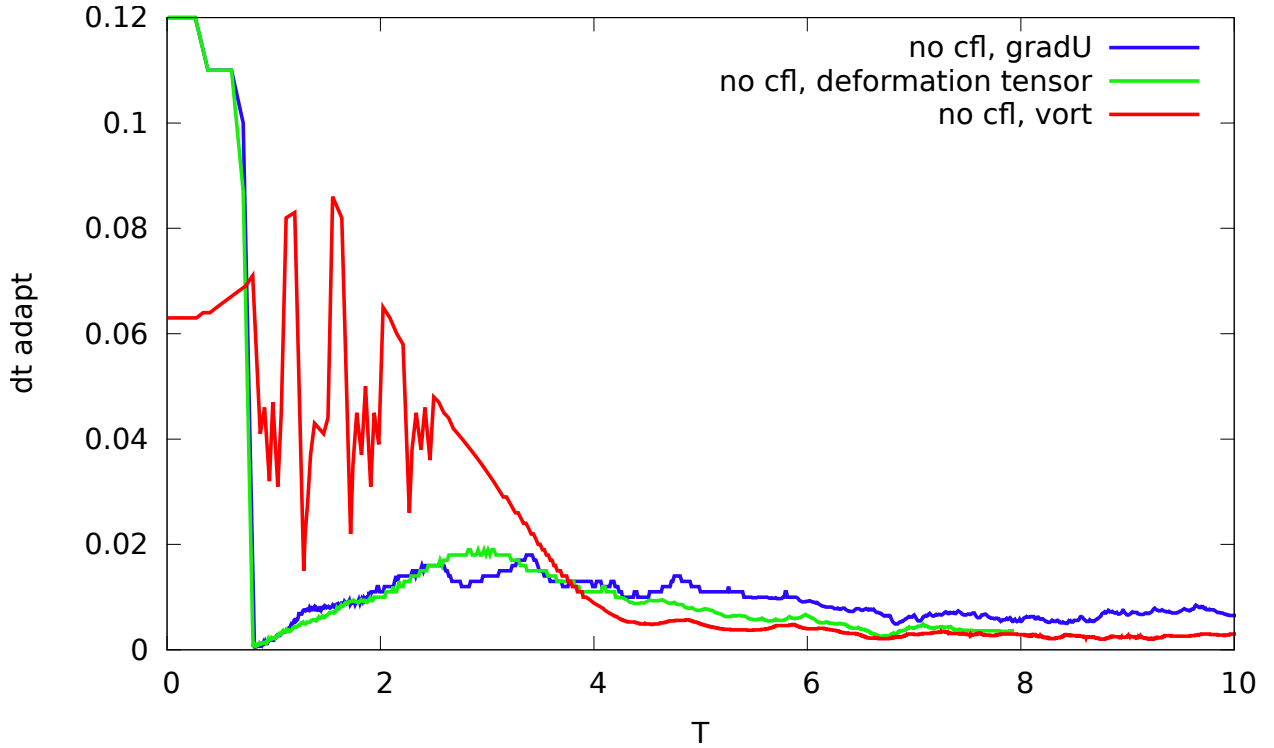


Figure 13: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt .** $\Delta t_{\text{adapt}} = \min(\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{stretch}})$. Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.

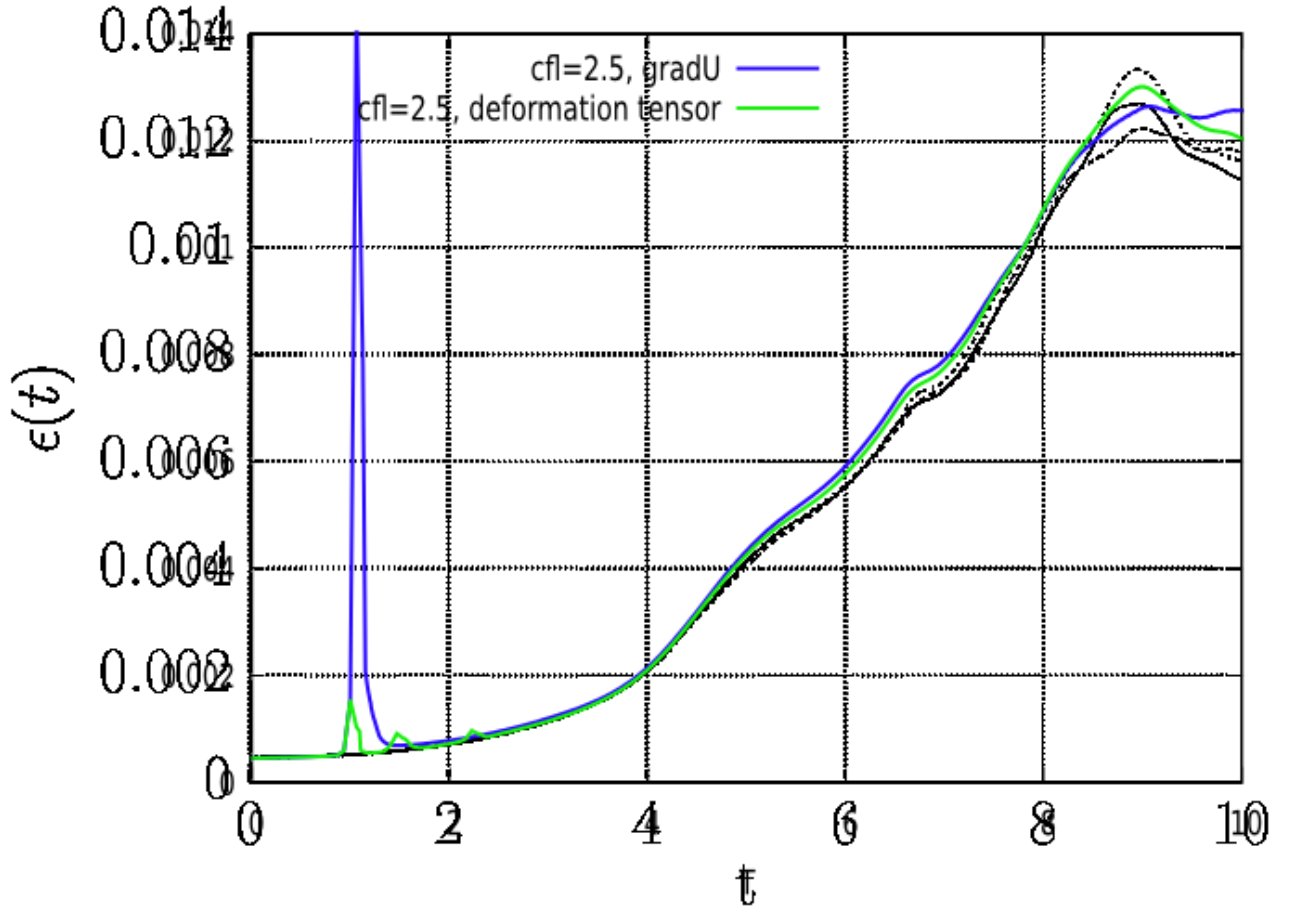


Figure 14: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt .** $\Delta t_{\text{adapt}} = \min(\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{stretch}}, \Delta t_{\text{cfl}})$ avec CFL=2,5. Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'entropie.

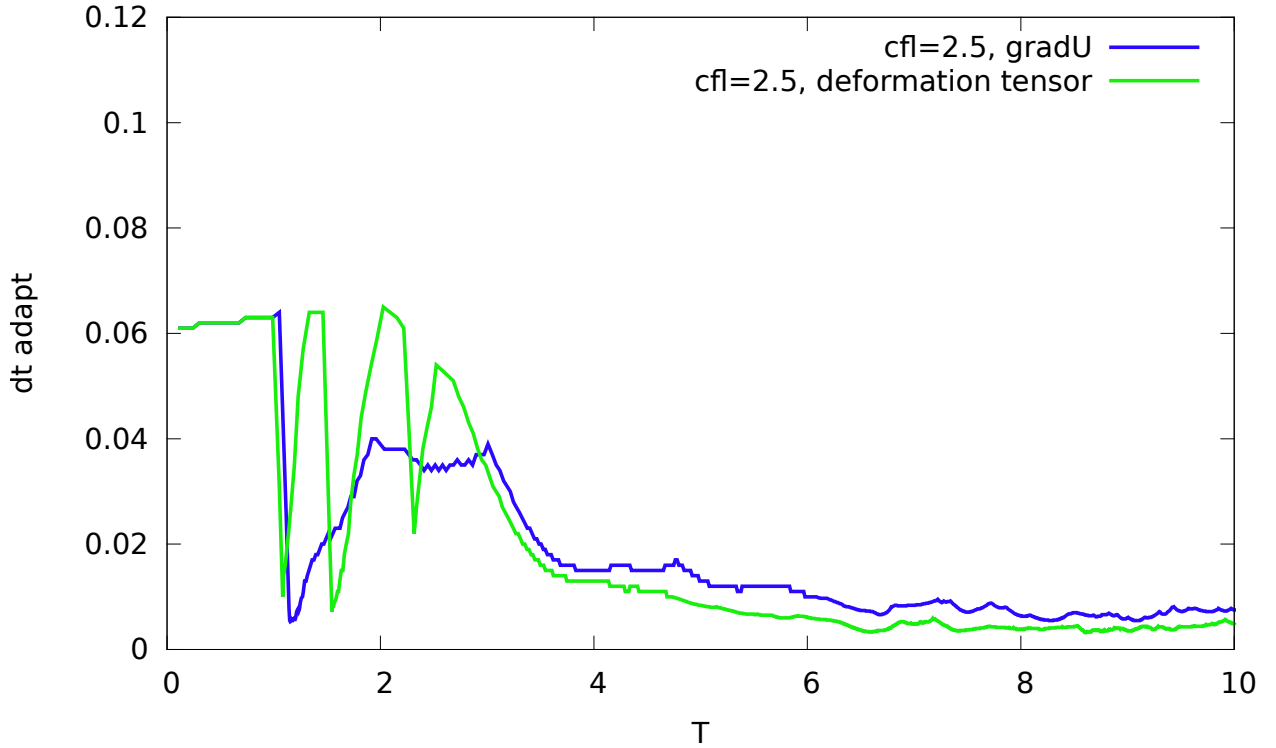


Figure 15: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les 10 Δt .** $\Delta t_{\text{adapt}} = \min(\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{stretch}}, \Delta t_{\text{cfl}})$ avec CFL=2,5. Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.

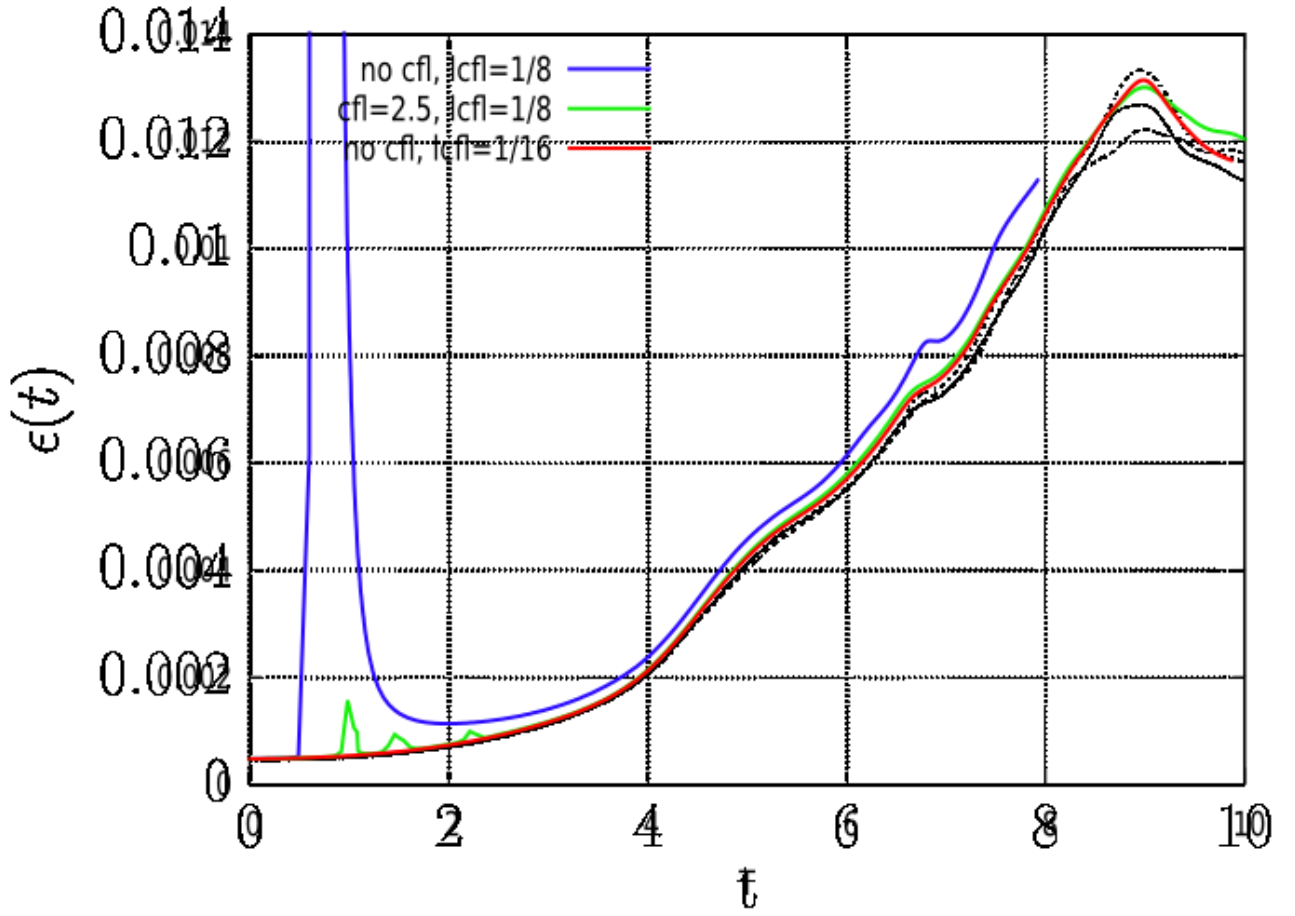


Figure 16: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les $10 \Delta t$ + tenseur déformation pour Δt_{adv} .** Dissipation de l'énergie νZ avec Z l'entropie.

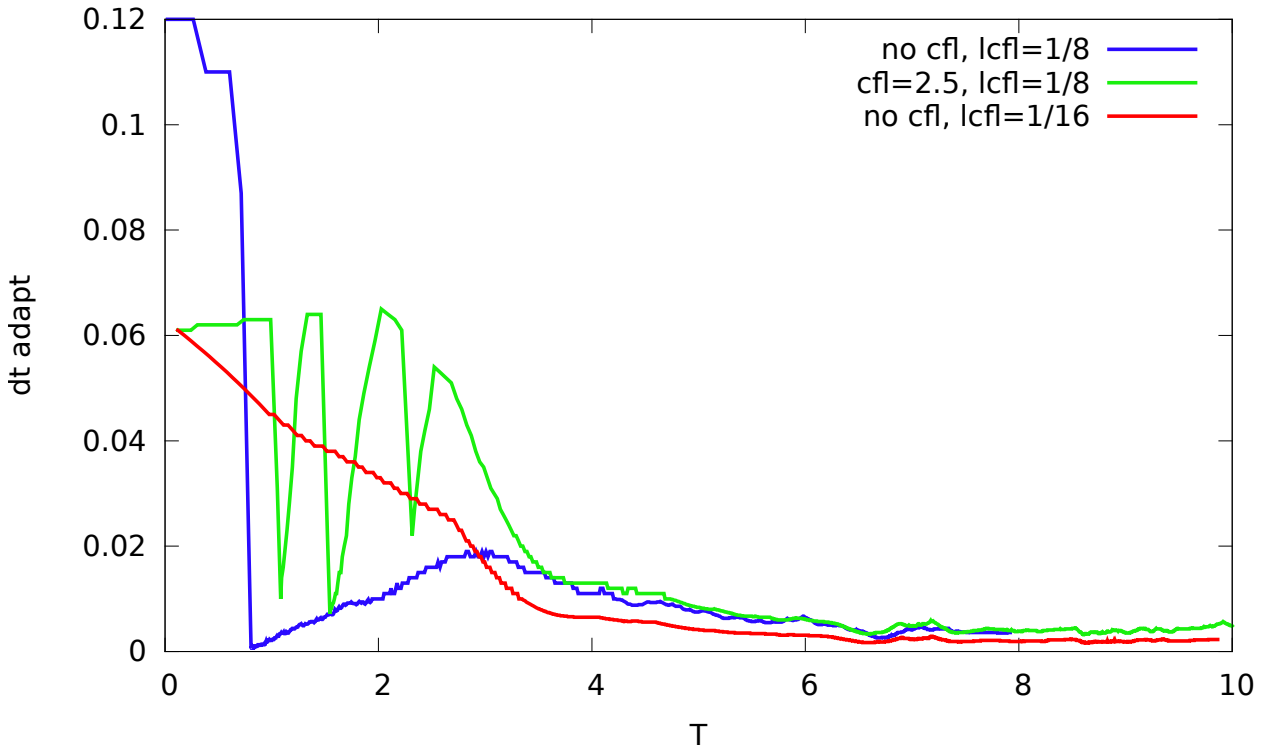


Figure 17: **Splitting d'ordre 1 avec sous-cycles + projection tous les $10 \Delta t$ + tenseur déformation pour Δt_{adv} .** Evolution du pas de temps adaptatif Δt_{adapt} au cours de la simulation.