

# Correction de vitesse pour la modélisation d'un écoulement incompressible dans une boîte

Lors de la résolution de l'équation de Poisson  $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \omega$ , le mode 0 des transformées de Fourier rapides de la vitesse est imposé à 0, ce qui entraîne une modification des valeurs moyennes des composantes de la vitesse et donc des composantes de la vitesse elles-mêmes lorsque la transformée de Fourier inverse est appliquée. Une correction de la vitesse est donc nécessaire après la résolution de l'équation de Poisson, à chaque itération.

On introduit la notation suivante pour exprimer la vitesse corrigée :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  désigne la vitesse en sortie de FFT et où  $\bar{\mathbf{u}}$  dénote la moyenne en espace de la vitesse, que l'on cherche ici à déterminer. L'écoulement s'effectue dans la direction  $x$  et la vitesse est initialisée en posant  $\mathbf{u}(t=0) = (u_x, u_y, u_z) = (u_\infty, 0, 0)$ .

$\bar{u}_x$  est un flux constant en espace, par conséquent  $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = 0$ . Ainsi le champ de vorticité moyen en espace est donné en 2D par :

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \quad (2)$$

et en 3D par :

$$\bar{\omega}_x = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \quad (3)$$

$$\bar{\omega}_y = -\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \quad (4)$$

$$\bar{\omega}_z = -\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \quad (5)$$

La correction de la vitesse se fait par réajustement du débit à l'entrée du domaine de calcul. Cette correction est développée ci-dessous composante par composante tout d'abord en 2D puis sera étendue au cas 3D.

## 2D

### Correction de $u_x$ :

On note  $B$  le coté correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la

décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_x dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{u}_x dy \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_x dy}_{\text{débit calculé}} + L_y \overline{u}_x \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \overline{u}_x = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y} \quad (8)$$

où  $L_y$  dénote la longueur du coté  $B$ . Or le débit que l'on souhaite imposer à l'entrée du domaine est égal à  $u_\infty L_y$  et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u}_x + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \quad (9)$$

Correction de  $u_y$ :

$\overline{u}_y$  est un flux invariant en  $y$ .

En effet, la vitesse est a divergence nulle, donc la moyenne en espace de la vitesse l'est également et ainsi  $\partial_x \overline{u}_x + \partial_y \overline{u}_y = 0$ . Or  $\overline{u}_x$  est un flux constant en espace, par conséquent on a bien  $\partial_y \overline{u}_y = 0$  (invariance de  $\overline{u}_y$  en  $y$ ).

$\overline{u}_y$  est donc un flux variant en  $x$  et d'après la relation 2 on a  $\overline{u}_y = \overline{\omega}x + c$ , avec  $c$  une constante. Ainsi :

$$\underbrace{\int_B u_y dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_y dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{\omega}x dy + \int_B c dy \quad (10)$$

Or ici le débit souhaité est égal a 0. Donc :

$$0 = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_y dy}_{\text{débit calculé}} + \overline{\omega}x_0 L_y + L_y c \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{\text{débit calculé}}{L_y} - \overline{\omega}x_0 \quad (12)$$

et donc :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u}_y + \overline{\omega}x - \overline{\omega}x_0 - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \quad (13)$$

où  $x_0$  dénote la coordonnée dans la direction  $x$  du bord d'entrée du domaine de calcul.

### 3D

Correction de  $u_x$ :

On note  $S$  la surface correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\iint_S u_x \, dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_x \, dydz}_{\text{débit calculé}} + \iint_S \overline{u}_x \, dydz \quad (14)$$

$$\iff \overline{u}_x = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} \quad (15)$$

et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u}_x + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z}} \quad (16)$$

Correction de  $u_y$ :

D'après la relation 5 on a  $\overline{u}_y = \overline{\omega}_z x + c$  avec  $c$  une constante. D'après 1 on obtient donc que  $u_y = \widetilde{u}_y + \overline{\omega}_z x + c$ . Ainsi,

$$\iint_S u_y \, dydz = \iint_S \widetilde{u}_y \, dydz + \iint_S \overline{\omega}_z x \, dydz + \iint_S c \, dydz \quad (17)$$

$$\iff \underbrace{\iint_S u_y \, dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_y \, dydz}_{\text{débit calculé}} + \overline{\omega}_z x_0 L_y L_z + c L_y L_z \quad (18)$$

où  $x_0$  désigne la coordonnée dans la direction  $x$  de la surface d'entrée  $S$  du domaine de calcul.

$$\text{Donc } c = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega}_z x_0$$

Or le débit souhaité est égal à 0, par conséquent :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u}_y + \overline{\omega}_z x - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega}_z x_0} \quad (19)$$

Correction de  $u_z$ :

Sur le même principe on a d'après la relation 4 que  $\overline{u}_z = -\overline{\omega}_y x + c$  avec  $c$  une constante. D'après 1 on obtient donc que  $u_z = \widetilde{u}_z + \overline{\omega}_y x + c$ . Ainsi en procédant de même que pour  $u_y$  on obtient :

$$\boxed{u_z = \widetilde{u}_z - \overline{\omega}_y x - \frac{\iint_S \widetilde{u}_z \, dydz}{L_y L_z} + \overline{\omega}_y x_0} \quad (20)$$

**Remarque :**

Dans le cadre d'un écoulement autour d'un cylindre (2D) ou d'une sphère (3D), on peut également choisir l'écoulement potentiel comme condition initiale de l'écoulement.

Par décomposition de Helmholtz on a:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \quad (21)$$

où la fonction courant  $\psi$  et le potentiel scalaire  $\phi$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\operatorname{div}(\psi) = 0, \quad \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (22)$$

Donc si l'écoulement est potentiel, c'est à dire irrotationnel, alors :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (23)$$

et en 2D, la fonction courant et le potentiel scalaire sont liés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

Ainsi  $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ .

La fonction courant associée à un écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre de rayon  $R$  est exprimée de la façon suivante :

$$\psi = u_\infty y \left( 1 + \frac{R^2}{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \right) \quad (25)$$

avec  $(x_C, y_C)$  les coordonnées du centre du cylindre dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 8, est désormais donnée par :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = [\psi]_B = \left[ u_\infty y \left( 1 - \frac{R^2}{(x_0 - x_C)^2 - (y - y_C)^2} \right) \right]_B \quad (26)$$

En 3D, il est pratique d'exprimer le potentiel d'un écoulement autour d'une sphère de rayon  $R$  dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , dans lequel l'angle dans la direction azimutale  $\theta$  est mesuré à partir de la direction de l'écoulement. Dans ce système de coordonnées, le potentiel est indépendant de l'angle méridional  $\varphi$  et est donné par :

$$\phi = -u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (27)$$

Ainsi, les composantes de la vitesse dans les directions  $r$  et  $\theta$  sont les suivantes:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -u_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (28)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = u_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (29)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, on obtient donc :

$$u_x = \frac{-u_\infty x}{r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (30)$$

$$u_y = \frac{u_\infty y}{r} \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (31)$$

$$u_z = 0 \quad (32)$$

où  $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$ , avec  $(x_S, y_S, z_S)$  les coordonnées du centre de la sphère dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 15, est désormais donnée par:

$$\underbrace{\iint_S u_x dydz}_{\text{débit souhaité}} = \iint_S \frac{-u_\infty x}{r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) dydz = -u_\infty x_0 \iint_S \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) dydz \quad (33)$$