

ParMeS User Guide

ParMeS Development team

April 28, 2014

Part I

Introduction

Part II

Operators

1 About operators

2 Computational operators

Lors de la résolution de l'équation de Poisson $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \omega$, le mode 0 des transformées de Fourier rapides de la vitesse est imposé à 0, ce qui entraîne une modification des valeurs moyennes des composantes de la vitesse et donc des composantes de la vitesse elles-mêmes lorsque la transformée de Fourier inverse est appliquée. Une correction de la vitesse est donc nécessaire après la résolution de l'équation de Poisson, à chaque itération.

On introduit la notation suivante pour exprimer la vitesse corrigée :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse en sortie de FFT et où $\bar{\mathbf{u}}$ dénote la moyenne en espace de la vitesse, que l'on cherche ici à déterminer. L'écoulement s'effectue dans la direction x et la vitesse est initialisée en posant $\mathbf{u}(t=0) = (u_{x\infty}, u_{y\infty}, u_{z\infty})$.

$\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent $\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} = 0$. Ainsi le champ de vorticité moyen en espace est donné en 2D par :

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (2)$$

et en 3D par :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\overline{\omega_y} = -\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} \quad (4)$$

$$\overline{\omega_z} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (5)$$

La correction de la vitesse se fait par réajustement du débit à l'entrée du domaine de calcul. Cette correction est développée ci-dessous composante par composante tout d'abord en 2D puis sera étendue au cas 3D.

2D

Correction de u_x :

On note B le coté correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{u_x} dy \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + L_y \overline{u_x} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \overline{u_x} = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y} \quad (8)$$

où L_y dénote la longueur du coté B . Or le débit que l'on souhaite imposer à l'entrée du domaine est égal à $u_{x\infty} L_y$ et donc :

$$\boxed{u_x = u_{x\infty} + \widetilde{u_x} - \frac{\int_B \widetilde{u_x} dy}{L_y}} \quad (9)$$

Correction de u_y :

$\overline{u_y}$ est un flux invariant en y .

En effet, la vitesse est a divergence nulle, donc la moyenne en espace de la vitesse l'est également et ainsi $\partial_x \overline{u_x} + \partial_y \overline{u_y} = 0$. Or $\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent on a bien $\partial_y \overline{u_y} = 0$ (invariance de $\overline{u_y}$ en y).

$\overline{u_y}$ est donc un flux variant en x et d'après la relation 2 on a $\overline{u_y} = \overline{\omega_x} + c$, avec c une constante. Ainsi :

$$\underbrace{\int_B u_y dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_y} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{\omega_x} dy + \int_B c dy \quad (10)$$

Or ici le débit souhaité est égal à 0. Donc :

$$0 = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_y dy}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega}x_0 L_y + L_y c \quad (11)$$

$$\iff c = -\frac{\int_B \widetilde{u}_y dy}{L_y} - \bar{\omega}x_0 \quad (12)$$

et donc :

$$u_y = u_{y\infty} + \widetilde{u}_y + \bar{\omega}(x - x_0) - \frac{\int_B \widetilde{u}_y dy}{L_y} \quad (13)$$

où x_0 dénote la coordonnée dans la direction x du bord d'entrée du domaine de calcul.

3D

Correction de u_x :

On note S la surface correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\begin{aligned} \underbrace{\iint_S u_x dydz}_{\text{débit souhaité}} &= \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}_{\text{débit calculé}} + \iint_S \bar{u}_x dydz \\ \iff \bar{u}_x &= \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} \\ \iff \bar{u}_x &= u_{x\infty} - \frac{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}{L_y L_z} \end{aligned} \quad (14)$$

et donc :

$$u_x = u_{x\infty} + \widetilde{u}_x - \frac{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}{L_y L_z} \quad (15)$$

Correction de u_y :

D'après la relation 5 on a $\bar{u}_y = \bar{\omega}_z x + c_1$ avec c_1 une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_y = \widetilde{u}_y + \bar{\omega}_z x + c_1$. Ainsi,

$$\iint_S u_y dydz = \iint_S \widetilde{u}_y dydz + \iint_S \bar{\omega}_z x dydz + \iint_S c_1 dydz \quad (16)$$

$$\iff \underbrace{\iint_S u_y dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_y dydz}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega}_z x_0 L_y L_z + c_1 L_y L_z \quad (17)$$

où x_0 désigne la coordonnée dans la direction x de la surface d'entrée S du domaine de calcul.

Donc

$$c_1 = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} x_0$$

$$c_1 = u_{y\infty} - \frac{\iint \widetilde{u_y} dydz}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} x_0$$

Et ainsi :

$$u_y = u_{y\infty} + \widetilde{u_y} + \overline{\omega_z}(x - x_0) - \frac{\iint \widetilde{u_y} dydz}{L_y L_z} \quad (18)$$

Correction de u_z :

Sur le même principe on a d'après la relation 4 que $\overline{u_z} = -\overline{\omega_y}x + c_2$ avec c_2 une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}x + c_2$. Ainsi en procédant de même que pour u_y on obtient :

$$u_z = u_{z\infty} + \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}(x - x_0) - \frac{\iint \widetilde{u_z} dydz}{L_y L_z} \quad (19)$$

Remarque 1:

Nous allons justifier ici la constance des termes c_1 et c_2 utilisés dans les corrections de u_y et u_z .

Tout d'abord, revenons sur la constante $\overline{\omega_x}$. Cette constante, de part les conditions de bord choisies dans notre problème, est nulle. En effet :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \quad (20)$$

$$\iff \iiint_{\Omega} \overline{\omega_x} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

car, en effet, des conditions périodiques sont imposées sur les bords dans les directions Y et Z . Par conséquent, $\overline{\omega_x}$ est nul.

De façon générale, à partir des relations 4 et 5, on peut exprimer les flux $\overline{u_x}$, $\overline{u_y}$ et $\overline{u_z}$ comme suit :

$$\overline{u_x} = c_0 \quad (22)$$

$$\overline{u_y} = \overline{\omega_z}x + f(y, z) \quad (23)$$

$$\overline{u_z} = -\overline{\omega_y}x + g(y, z) \quad (24)$$

où c_0 est une constante et où f et g sont des fonctions dépendant de y et de z . Ainsi, la jacobienne de $\overline{\mathbf{u}}$ est donnée par :

$$J_{\overline{\mathbf{u}}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{\omega_z} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ -\overline{\omega_y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, à partir de la condition d'incompressibilité, on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \iff \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0} \quad (25)$$

D'autre part, on sait d'après 21 que $\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} = 0$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \quad (26)$$

A partir de ces deux équations, on obtient les conditions suivantes sur f et g :

$$\begin{aligned} \partial_y(25) - \partial_z(26) &\iff \Delta f = 0 \\ \partial_z(25) + \partial_y(26) &\iff \Delta g = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions du système composé des équations 25 et 26 sont les fonctions f et g s'exprimant comme les combinaisons linéaires suivantes de y et z :

$$\begin{cases} f(y, z) = ay + bz + c_1 \\ g(y, z) = by - az + c_2, \end{cases} \quad \text{avec } a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (27)$$

But : Montrer que $f(y, z) = c_1$ et que $g(y, z) = c_2$. Ainsi la correction des composantes u_y et u_z de la vitesse sera bien donnée par les équations 18 et 19.

Sachant que les conditions imposées sur les bords du domaine dans les directions Y et Z sont des conditions périodiques, on a :

$$\overline{u_y}(x, y_0, z) = \overline{u_y}(x, y_{\max}, z), \quad (28)$$

$$\overline{u_y}(x, y, z_0) = \overline{u_y}(x, y, z_{\max}) \quad (29)$$

où y_0, z_0 et y_{\max}, z_{\max} désignent respectivement les coordonnées minimales et maximales du domaine dans les directions Y et Z . Donc d'après la relation 23 et d'après l'expression de f donnée dans le système 27, on obtient les égalités suivantes :

$$\overline{\omega_z}x + ay_0 + bz + c_1 = \overline{\omega_z}x + ay_{\max} + bz + c_1, \quad (30)$$

$$\overline{\omega_z}x + ay + bz_0 + c_1 = \overline{\omega_z}x + ay + bz_{\max} + c_1 \quad (31)$$

\iff

$$a(y_0 - y_{\max}) = 0 \quad (32)$$

$$b(z_0 - z_{\max}) = 0 \quad (33)$$

La longueur du domaine étant non nulle dans les directions Y et Z , alors $a = b = 0$, et donc $f(y, z) = c_1$ et $g(y, z) = c_2$. Bien-sûr, le même résultat est obtenu en considérant la relation 24 et l'expression de g donnée dans le système 27.

Remarque 2:

Dans le cadre d'un écoulement autour d'un cylindre (2D) ou d'une sphère (3D), on peut également choisir l'écoulement potentiel comme condition initiale de l'écoulement.

Par décomposition de Helmholtz on a:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \quad (34)$$

où la fonction courant ψ et le potentiel scalaire ϕ vérifient les propriétés suivantes :

$$\operatorname{div}(\psi) = 0, \quad \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (35)$$

Donc si l'écoulement est potentiel, c'est à dire irrotationnel, alors :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (36)$$

et en 2D, la fonction courant et le potentiel scalaire sont liés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (37)$$

Ainsi $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

La fonction courant associée à un écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre de rayon R est exprimée de la façon suivante :

$$\psi = u_\infty y \left(1 + \frac{R^2}{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \right) \quad (38)$$

avec (x_C, y_C) les coordonnées du centre du cylindre dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 8, est désormais donnée par :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = [\psi]_B = \left[u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{(x_0 - x_C)^2 - (y - y_C)^2} \right) \right]_B \quad (39)$$

En 3D, il est pratique d'exprimer le potentiel d'un écoulement autour d'une sphère de rayon R dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , dans lequel l'angle dans la direction azimutale θ est mesuré à partir de la direction de l'écoulement. Dans ce système de coordonnées, le potentiel est indépendant de l'angle méridional φ et est donné par :

$$\phi_{\text{sph}} = u_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (40)$$

Ainsi, les composantes de la vitesse en coordonnées sphériques sont les suivantes:

$$\mathbf{u}_{\text{sph}} = \nabla \phi_{\text{sph}} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \quad (41)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (42)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -u_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (43)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (44)$$

$$(45)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, le potentiel est donc donné par :

$$\phi_{\text{cart}} = u_\infty x \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (46)$$

où $x = r \cos \theta$ et $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$, avec (x_S, y_S, z_S) les coordonnées du centre de la sphère dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Les composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\mathbf{u}_{\text{cart}} = \nabla \phi_{\text{cart}} = (u_x, u_y, u_z) \quad (47)$$

$$u_x = u_\infty \left(1 - \frac{3R^3 x^2}{2r^5} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (48)$$

$$u_y = -u_\infty \frac{3R^3 xy}{2r^5} \quad (49)$$

$$u_z = -u_\infty \frac{3R^3 xz}{2r^5} \quad (50)$$

3 Monitors

3.1 Introduction

3.2 Printer

3.3 DragAndLift

3.4 Reprojection_criterion

Purpose : compute a projection criterion, depending on the current vorticity value on the grid.

IN : vorticity field, reproj_cst

OUT : reprojRate, projCriterion with

reprojRate : how often (in terms of iterations) this criteria must be taken into account
and checkCriterion : true if reprojRate must be checked and updated (if necessary).

- Case 1: checkCriterion == True.

If checkCriterion is true, the operator computes a criterion projection every reprojRate iteration. If this criterion is greater than reproj_cst (user defined constant), then reprojRate is set to 1. reprojRate is reset to defaultRate (user-defined) at the beginning of every apply.

- Case 2 : checkCriterion == False.

The operator will do nothing but give the (user-defined) value for reprojRate.

If io_params is set, then a file is appended with some diagnostics values (see below) each reprojRate iterations.

Ω being the whole domain, ω the vorticity field, let us denote :

$$d1 = \max_{\Omega} \left| \sum_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \right| \quad (51)$$

$$d2 = \max_{\Omega} \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right| \quad \forall i, j \in [0, 2] \quad (52)$$

And so, diagnostics = simulation.time, projCriterion, d1, d2, counter

counter being the number of projection done since the beginning of the simulation.

3.5 Energy_enstrophy

4 Redistribute operators