

Condition de Stabilité sur le Stretching

L'équation de Navier-Stokes peut être résolue en utilisant le splitting d'opérateur, qui consiste à traiter indépendamment les opérateurs du problème. Dans ce document, nous nous intéressons au terme de stretching qui représente les déplacements transversaux de l'écoulement. L'équation de Stretching peut se présenter sous plusieurs formes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\nabla u] \cdot \omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\nabla u]^T \cdot \omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{div}(\omega u) \quad (3)$$

Une autre condition qui doit être vérifiée est la conservation de la masse, exprimée par $\text{div}(u) = 0$.

La définition de la vorticité est :

$$\omega = \overrightarrow{\text{rot}}(u) \quad (4)$$

1 Stabilité

L'équation (1) conserve la masse. Cette expression peut devenir instable numériquement, tout dépendra du schéma d'intégration en temps ainsi que de la forme de la matrice ∇u . On peut se ramener à l'étude d'un système linéaire de la forme :

$$\omega' = A\omega \quad (5)$$

Dans le cas où A est diagonalisable, on peut se ramener à l'étude des valeurs propres de A , car l'on aura :

$$\omega' = \lambda_i \omega \quad \text{où } i \in \{0, 1, 2\} \quad (6)$$

On va s'intéresser à l'étude de la condition à mettre sur λ . On veut pour que le système converge que $\text{Re}(\lambda) < 1$, car c'est elle qui va entraîner la convergence dans la résolution de l'EDO. (il faut que la puissance de l'exponentielle soit plus petite que 1 pour converger) On ne s'intéresse qu'à la partie réelle car la partie complexe est une fonction oscillante entre -1 et 1, et donc bornable.

On veut que l'équation (6) converge en temps, c'est-à-dire pour le cas de schéma à 2 pas de temps :

$$\omega^{n+1} = B\omega^n \quad (7)$$

Que B doit être bornée en valeur absolue par 1 de tel sorte que :

$$\left| \frac{\omega^{n+1}}{\omega^n} \right| < 1 \quad (8)$$

Les conditions pour les différents schémas sont les suivantes :

- Le schéma d'Euler (ordre 1)

L'équation (5) discrétisée avec un schéma d'Euler s'écrit sous la forme :

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} = \nabla u \omega^n \quad (9)$$

cela nous donne le résultat suivant :

$$\omega^{n+1} = (1 + \nabla u \cdot \Delta t) \omega^n \quad (10)$$

La condition pour le schéma d'Euler est alors que $|1 + X| < 1$, avec $X = \nabla u \cdot \Delta t$. Il faut donc que $X = \nabla u \cdot \Delta t$ soit inférieure à 2.

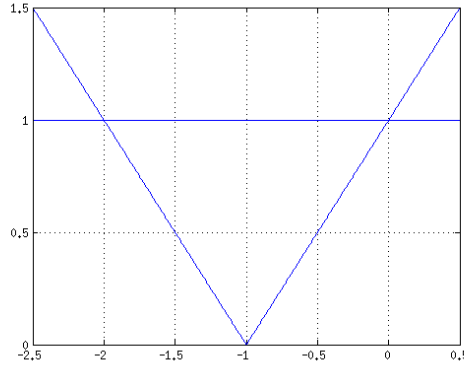


Figure 1: Représentation graphique des équations $y = |1 + x|$ et $y = 1$, pour estimer les conditions à mettre sur Δt

On aura donc :

$$\nabla u \cdot \Delta t < 2$$

En faisant le changement de variable, si la matrice $A = [\nabla u]$ est diagonalisable. Nous avons :

$$\lambda_i \cdot \Delta t < 2 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2$$

$$\Delta t < \frac{2}{\lambda_i}$$

On utilise ensuite le théorème de Gerschgorin, qui permet de majorer les valeurs propres de la matrice A . On économise ainsi le nombre d'opération à faire afin de déterminer une condition pour le pas de temps Δt .

Théorème 1.1 (théorème de Gerschgorin). *Soit A une matrice complexe de taille $n \times n$, de terme général a_{ij} . Toute valeur propre de A appartient au moins à un disque de Gerschgorin $D_i = \{z \in \mathbb{C}, |a_{ii} - z| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\}$.*

On peut donc majorer le rayon spectral de la matrice A par $\max_i (\sum_j |a_{ij}|)$.

On obtient ainsi la condition de stabilité suivante pour le schéma d'euler :

$$\Delta t < \frac{2}{\max_i (\sum_j |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|)} \quad (11)$$

- Le schéma de Runge Kutta (ordre 2) Pour Runge-Kutta d'ordre 2, on obtient une majoration identique à celle d'Euler, car on a :

$$\omega^{n+1} = (1 + \nabla u \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(\nabla u \cdot \Delta t)^2) \omega^n \quad (12)$$

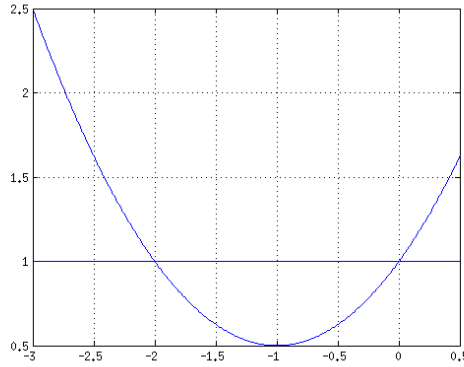


Figure 2: Représentation graphique des équations $y = |1 + x + \frac{1}{2}x^2|$ et $y = 1$, pour estimer les conditions à mettre sur Δt

On obtient alors en appliquant aussi le théorème 1.1, la condition suivante pour le pas de temps :

$$\Delta t < \frac{2}{\max_i (\sum_j |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|)} \quad (13)$$

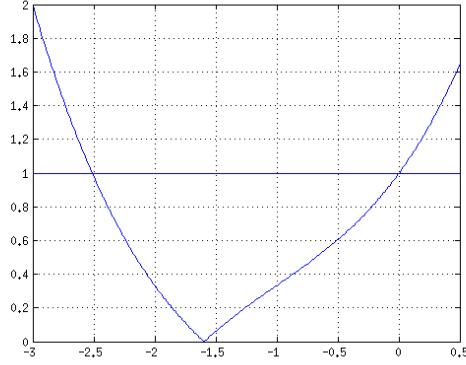


Figure 3: Représentation graphique des équations $y = |1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3|$ et $y = 1$, pour estimer les conditions à mettre sur Δt

- Le schéma de Runge Kutta (ordre 3) Pour Runge-Kutta d'ordre 3, on a :

$$\omega^{n+1} = \left(1 + \nabla u \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(\nabla u \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\nabla u \cdot \Delta t)^3\right) \omega^n \quad (14)$$

On obtient alors en appliquant aussi le théorème 1.1, la condition suivante pour le pas de temps :

$$\Delta t < \frac{2.5127}{\max_i \left(\sum_j \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \right)} \quad (15)$$

- Le schéma de Runge Kutta (ordre 4) Pour Runge-Kutta d'ordre 4, on a :

$$\omega^{n+1} = \left(1 + \nabla u \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(\nabla u \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\nabla u \cdot \Delta t)^3 + \frac{1}{24}(\nabla u \cdot \Delta t)^4\right) \omega^n \quad (16)$$

On obtient alors en appliquant aussi le théorème 1.1, la condition suivante pour le pas de temps :

$$\Delta t < \frac{2.7853}{\max_i \left(\sum_j \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \right)} \quad (17)$$

Il faut maintenant comparer ces majorations Table 1, avec la condition de stabilité sur l'advection qui est la suivante :

$$\Delta t \simeq \frac{C}{\max_i \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{L_\infty}} \quad (18)$$

avec C qui vaut en général 1.

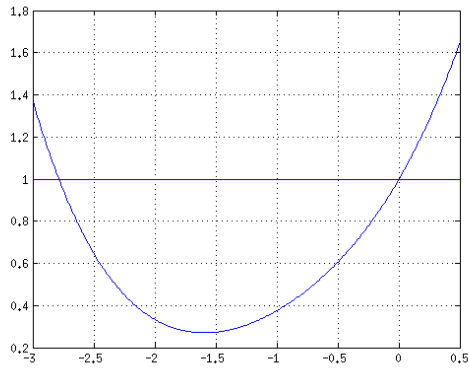


Figure 4: Représentation graphique des équations $y = |1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4|$ et $y = 1$, pour estimer les conditions à mettre sur Δt

Schéma	$C_{\text{Stretching}}$	Ordre
Euler	2	1
Runge-Kutta 2($\alpha = \frac{1}{2}$)	2	2
Runge-Kutta 3	2.5127	3
Runge-Kutta 4	2.7853	4

Table 1: Tableau récapitulatif des constantes intervenants dans la condition de stabilité du schéma en temps

2 Étude sur un cas test

2.1 Cas test Analytique

L'étude de l'influence de la discrétisation en temps a été faite sur l'exemple suivant :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \cos(\pi t) \\ -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(2\pi z) \cos(\pi t) \\ -\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi z) \cos(\pi t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(\pi t) \sin(2\pi x) \left(-\cos(2\pi y) \sin^2(\pi z) + \cos(2\pi z) \sin^2(\pi y) \right) \\ 2\pi \cos(\pi t) \sin(2\pi y) \left(2 \cos(2\pi z) \sin^2(\pi x) + \cos(2\pi x) \sin^2(\pi z) \right) \\ -2\pi \cos(\pi t) \sin(2\pi z) \left(\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \cos(2\pi y) \sin^2(\pi x) \right) \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad (21)$$

La vorticité est initialisée en prenant le rotationnel de u :

$$\vec{w} = \vec{\text{rot}} u \quad (22)$$

Pour cette exemple, et en prenant l'équation Equation 1 avec un schéma aux différences finis centrés d'ordre 4 en espace avec un stencil de 5, on obtient les conditions de stabilité suivantes pour le schéma en temps Table 2.

$\Delta t_{\text{advection}} = 0.44331613$		
Schéma	$\max(\Delta t_{\text{Stretching}})$	Ordre
Euler	0.14994711	1
Runge-Kutta 2	0.14994711	2
Runge-Kutta 3	0.18838605	3
Runge-Kutta 4	0.20882384	4
Adams-Moulton 3	0.44984132	3

Table 2: Conditions de stabilité sur le pas de temps pour l'exemple (19)

2.2 Cas test avec des données discrètes d'entrées

Jean-Baptiste a fourni un champs de vitesse discret avec turbulences anisotropes et hétérogènes, en 128^3 . Nous avons testé les différentes conditions de stabilité

Table 3. (à Reynolds 80)

Les données en entrées sont stockées dans les fichiers :

- Fields_sav0_U.data
- Fields_sav0_V.data
- Fields_sav0_W.data

$\Delta t_{\text{advection}} = 0.106679$		
Schéma	$\max(\Delta t_{\text{Stretching}})$	Ordre
Euler	0.124258	1
Runge-Kutta 2	0.124258	2
Runge-Kutta 3	0.151127	3
Runge-Kutta 4	0.173049	4

Table 3: Conditions de stabilité sur le pas de temps pour un champ de vitesse discret