

ParMeS User Guide

ParMeS Development team

April 10, 2018

Part I

Introduction

Part II

Operators

1 About operators

2 Computational operators

Lors de la résolution de l'équation de Poisson $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \omega$, le mode 0 des transformées de Fourier rapides de la vitesse est imposé à 0, ce qui entraîne une modification des valeurs moyennes des composantes de la vitesse et donc des composantes de la vitesse elles-mêmes lorsque la transformée de Fourier inverse est appliquée. Une correction de la vitesse est donc nécessaire après la résolution de l'équation de Poisson, à chaque itération.

On introduit la notation suivante pour exprimer la vitesse corrigée :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse en sortie de FFT et où $\bar{\mathbf{u}}$ dénote la moyenne en espace de la vitesse, que l'on cherche ici à déterminer. L'écoulement s'effectue dans la direction x et la vitesse est initialisée en posant $\mathbf{u}(t=0) = (u_{x\infty}, u_{y\infty}, u_{z\infty})$.

$\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent $\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} = 0$. Ainsi le champ de vorticité moyen en espace est donné en 2D par :

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (2)$$

et en 3D par :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\overline{\omega_y} = -\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} \quad (4)$$

$$\overline{\omega_z} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \quad (5)$$

La correction de la vitesse se fait par réajustement du débit à l'entrée du domaine de calcul. Cette correction est développée ci-dessous composante par composante tout d'abord en 2D puis sera étendue au cas 3D.

2D

Correction de u_x :

On note B le coté correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{u_x} dy \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} dy}_{\text{débit calculé}} + L_y \overline{u_x} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \overline{u_x} = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y} \quad (8)$$

où L_y dénote la longueur du coté B . Or le débit que l'on souhaite imposer à l'entrée du domaine est égal à $u_{x\infty} L_y$ et donc :

$$\boxed{u_x = u_{x\infty} + \widetilde{u_x} - \frac{\int_B \widetilde{u_x} dy}{L_y}} \quad (9)$$

Correction de u_y :

$\overline{u_y}$ est un flux invariant en y .

En effet, la vitesse est a divergence nulle, donc la moyenne en espace de la vitesse l'est également et ainsi $\partial_x \overline{u_x} + \partial_y \overline{u_y} = 0$. Or $\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent on a bien $\partial_y \overline{u_y} = 0$ (invariance de $\overline{u_y}$ en y).

$\overline{u_y}$ est donc un flux variant en x et d'après la relation 2 on a $\overline{u_y} = \overline{\omega_x} x + c$, avec c une constante. Ainsi :

$$\underbrace{\int_B u_y dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_y} dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{\omega_x} x dy + \int_B c dy \quad (10)$$

Or ici le débit souhaité est égal à 0. Donc :

$$0 = \underbrace{\int_B \widetilde{u}_y dy}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega}x_0 L_y + L_y c \quad (11)$$

$$\Longleftrightarrow c = -\frac{\int_B \widetilde{u}_y dy}{L_y} - \bar{\omega}x_0 \quad (12)$$

et donc :

$$u_y = u_{y\infty} + \widetilde{u}_y + \bar{\omega}(x - x_0) - \frac{\int_B \widetilde{u}_y dy}{L_y} \quad (13)$$

où x_0 dénote la coordonnée dans la direction x du bord d'entrée du domaine de calcul.

3D

Correction de u_x :

On note S la surface correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\begin{aligned} \underbrace{\iint_S u_x dydz}_{\text{débit souhaité}} &= \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}_{\text{débit calculé}} + \iint_S \bar{u}_x dydz \\ \Longleftrightarrow \bar{u}_x &= \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} \\ \Longleftrightarrow \bar{u}_x &= u_{x\infty} - \frac{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}{L_y L_z} \end{aligned} \quad (14)$$

et donc :

$$u_x = u_{x\infty} + \widetilde{u}_x - \frac{\iint_S \widetilde{u}_x dydz}{L_y L_z} \quad (15)$$

Correction de u_y :

D'après la relation 5 on a $\bar{u}_y = \bar{\omega}_z x + c_1$ avec c_1 une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_y = \widetilde{u}_y + \bar{\omega}_z x + c_1$. Ainsi,

$$\iint_S u_y dydz = \iint_S \widetilde{u}_y dydz + \iint_S \bar{\omega}_z x dydz + \iint_S c_1 dydz \quad (16)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\iint_S u_y dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint_S \widetilde{u}_y dydz}_{\text{débit calculé}} + \bar{\omega}_z x_0 L_y L_z + c_1 L_y L_z \quad (17)$$

où x_0 désigne la coordonnée dans la direction x de la surface d'entrée S du domaine de calcul.

Donc

$$c_1 = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} x_0$$

$$c_1 = u_{y\infty} - \frac{\iint \widetilde{u_y} dydz}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} x_0$$

Et ainsi :

$$u_y = u_{y\infty} + \widetilde{u_y} + \overline{\omega_z}(x - x_0) - \frac{\iint \widetilde{u_y} dydz}{L_y L_z} \quad (18)$$

Correction de u_z :

Sur le même principe on a d'après la relation 4 que $\overline{u_z} = -\overline{\omega_y}x + c_2$ avec c_2 une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}x + c_2$. Ainsi en procédant de même que pour u_y on obtient :

$$u_z = u_{z\infty} + \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y}(x - x_0) - \frac{\iint \widetilde{u_z} dydz}{L_y L_z} \quad (19)$$

Remarque 1:

Nous allons justifier ici la constance des termes c_1 et c_2 utilisés dans les corrections de u_y et u_z .

Tout d'abord, revenons sur la constante $\overline{\omega_x}$. Cette constante, de part les conditions de bord choisies dans notre problème, est nulle. En effet :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \quad (20)$$

$$\iff \iiint_{\Omega} \overline{\omega_x} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

car, en effet, des conditions périodiques sont imposées sur les bords dans les directions Y et Z . Par conséquent, $\overline{\omega_x}$ est nul.

De façon générale, à partir des relations 4 et 5, on peut exprimer les flux $\overline{u_x}$, $\overline{u_y}$ et $\overline{u_z}$ comme suit :

$$\overline{u_x} = c_0 \quad (22)$$

$$\overline{u_y} = \overline{\omega_z}x + f(y, z) \quad (23)$$

$$\overline{u_z} = -\overline{\omega_y}x + g(y, z) \quad (24)$$

où c_0 est une constante et où f et g sont des fonctions dépendant de y et de z . Ainsi, la jacobienne de $\overline{\mathbf{u}}$ est donnée par :

$$J_{\overline{\mathbf{u}}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{\omega_z} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ -\overline{\omega_y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, à partir de la condition d'incompressibilité, on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \iff \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0} \quad (25)$$

D'autre part, on sait d'après 21 que $\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} = 0$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \quad (26)$$

A partir de ces deux équations, on obtient les conditions suivantes sur f et g :

$$\begin{aligned} \partial_y(25) - \partial_z(26) &\iff \Delta f = 0 \\ \partial_z(25) + \partial_y(26) &\iff \Delta g = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions du système composé des équations 25 et 26 sont les fonctions f et g s'exprimant comme les combinaisons linéaires suivantes de y et z :

$$\begin{cases} f(y, z) = ay + bz + c_1 \\ g(y, z) = by - az + c_2, \end{cases} \quad \text{avec } a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (27)$$

But : Montrer que $f(y, z) = c_1$ et que $g(y, z) = c_2$. Ainsi la correction des composantes u_y et u_z de la vitesse sera bien donnée par les équations 18 et 19.

Sachant que les conditions imposées sur les bords du domaine dans les directions Y et Z sont des conditions périodiques, on a :

$$\overline{u_y}(x, y_0, z) = \overline{u_y}(x, y_{\max}, z), \quad (28)$$

$$\overline{u_y}(x, y, z_0) = \overline{u_y}(x, y, z_{\max}) \quad (29)$$

où y_0, z_0 et y_{\max}, z_{\max} désignent respectivement les coordonnées minimales et maximales du domaine dans les directions Y et Z . Donc d'après la relation 23 et d'après l'expression de f donnée dans le système 27, on obtient les égalités suivantes :

$$\overline{\omega_z}x + ay_0 + bz + c_1 = \overline{\omega_z}x + ay_{\max} + bz + c_1, \quad (30)$$

$$\overline{\omega_z}x + ay + bz_0 + c_1 = \overline{\omega_z}x + ay + bz_{\max} + c_1 \quad (31)$$

\iff

$$a(y_0 - y_{\max}) = 0 \quad (32)$$

$$b(z_0 - z_{\max}) = 0 \quad (33)$$

La longueur du domaine étant non nulle dans les directions Y et Z , alors $a = b = 0$, et donc $f(y, z) = c_1$ et $g(y, z) = c_2$. Bien-sûr, le même résultat est obtenu en considérant la relation 24 et l'expression de g donnée dans le système 27.

Remarque 2:

Dans le cadre d'un écoulement autour d'un cylindre (2D) ou d'une sphère (3D), on peut également choisir l'écoulement potentiel comme condition initiale de l'écoulement.

Par décomposition de Helmholtz on a:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \quad (34)$$

où la fonction courant ψ et le potentiel scalaire ϕ vérifient les propriétés suivantes :

$$\operatorname{div}(\psi) = 0, \quad \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (35)$$

Donc si l'écoulement est potentiel, c'est à dire irrotationnel, alors :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (36)$$

et en 2D, la fonction courant et le potentiel scalaire sont liés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (37)$$

$$\text{Ainsi } u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La fonction courant associée à un écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre de rayon R est exprimée de la façon suivante :

$$\psi = u_\infty y \left(1 + \frac{R^2}{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \right) \quad (38)$$

avec (x_C, y_C) les coordonnées du centre du cylindre dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 8, est désormais donnée par :

$$\underbrace{\int_B u_x dy}_{\text{débit souhaité}} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = [\psi]_B = \left[u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{(x_0 - x_C)^2 - (y - y_C)^2} \right) \right]_B \quad (39)$$

En 3D, il est pratique d'exprimer le potentiel d'un écoulement autour d'une sphère de rayon R dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , dans lequel l'angle dans la direction azimutale θ est mesuré à partir de la direction de l'écoulement. Dans ce système de coordonnées, le potentiel est indépendant de l'angle méridional φ et est donné par :

$$\phi_{\text{sph}} = u_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (40)$$

Ainsi, les composantes de la vitesse en coordonnées sphériques sont les suivantes:

$$\mathbf{u}_{\text{sph}} = \nabla \phi_{\text{sph}} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \quad (41)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (42)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -u_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (43)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (44)$$

$$(45)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, le potentiel est donc donné par :

$$\phi_{\text{cart}} = u_\infty x \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (46)$$

où $x = r \cos \theta$ et $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$, avec (x_S, y_S, z_S) les coordonnées du centre de la sphère dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Les composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\mathbf{u}_{\text{cart}} = \nabla \phi_{\text{cart}} = (u_x, u_y, u_z) \quad (47)$$

$$u_x = u_\infty \left(1 - \frac{3R^3 x^2}{2r^5} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (48)$$

$$u_y = -u_\infty \frac{3R^3 xy}{2r^5} \quad (49)$$

$$u_z = -u_\infty \frac{3R^3 xz}{2r^5} \quad (50)$$

3 Monitors

4 Redistribute operators

5 Advection et remaillage

L'advection est implémentée de trois manières différentes dans ParMeS. En fortran, à travers le module `scales2py`, en python et en OpenCL. Les détails de l'implémentation OpenCL sur GPU sont donnés en section ??.

Les versions fortran et OpenCL permettent de réaliser une advection multi-échelle. La vitesse étant connue sur une grille plus grossière que les quantités advectées. La vitesse de chaque particule est interpolée à partir de la grille grossière.

5.1 Formules de remaillage $\Lambda_{n,k}$

Les formules de remaillage de la forme $\Lambda_{n,k}$ sont des fonctions polynomiales par morceaux, symétriques, de support $] -n/2 - 1, n/2 - 1[$, de régularité C^k qui conservent les n premiers moments. La formule est donnée par morceaux sur les intervalles entiers par un polynôme p_i de degré $2k + 1$, soit $n + 2$ polynômes. Les différentes formules générées sont résumées dans le tableau 1.

Les contraintes sont les suivantes:

- Symétrie (seulement $n/2 + 1$ polynômes à chercher)

$$\Lambda_{n,k}(x) = \Lambda_{n,k}(-x) \quad (51)$$

$$\Lambda_{n,k} = \begin{cases} p_i(x) & \text{si } |x| \in [n/2 - i; n/2 + 1 - i[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (52)$$

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} c_{i,j} x^j, \quad i = 0, \dots, n/2 + 1 \quad (53)$$

- Raccords C^k entre les polynômes
- Conservation des moments discrets:

$$\sum_{l=-N}^N l^q \Lambda_{n,k}(s - l) = s^q, \quad 0 < s < 1, q = 0 \dots n \quad (54)$$

Ainsi, par ces contraintes, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les coefficients $c_{i,k}$. Le nombre d'équation est bien supérieur au nombre d'inconnues.

Remarque 1: pour chaque formule obtenue, les moments continus sont conservés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^q \Lambda_{n,k}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (55)$$

Remarque 2: on obtient une formule exacte aux points de coordonnées entières:

$$\Lambda_{n,k}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i \in \{-n/2 + 1, \dots, n/2 - 1\} \quad (56)$$

$$M'_4 = \Lambda_{2,1}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}|x|^2 + \frac{3}{2}|x|^3 & 0 \leq |x| < 1 \\ 2 - 4|x| + \frac{5}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x|^3 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (57)$$

$$\Lambda_{2,2}(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 - \frac{9}{2}|x|^3 + \frac{15}{2}|x|^4 - 3|x|^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + 18|x| - 29|x|^2 + \frac{43}{2}|x|^3 - \frac{15}{2}|x|^4 + |x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (58)$$

$$\Lambda_{2,3}(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - 15x^4 + (\frac{75}{2})x^5 - (\frac{63}{2})x^6 + 9x^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ 32 - 168x + 376x^2 - 460x^3 + 330x^4 - (\frac{277}{2})x^5 + (\frac{63}{2})x^6 - 3x^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (59)$$

$$\Lambda_{2,4}(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - (\frac{105}{2})x^5 + (\frac{357}{2})x^6 - 231x^7 + 135x^8 - 30x^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -208 + 1432x - 4304x^2 + 7420x^3 - 8085x^4 + (\frac{11543}{2})x^5 \\ \quad - (\frac{5397}{2})x^6 + 797x^7 - 135x^8 + 10x^9 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (60)$$

$$M'_6 = \Lambda_{4,2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{35}{12}|x|^3 + \frac{21}{4}|x|^4 - \frac{25}{12}|x|^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + \frac{75}{4}|x| - \frac{245}{8}|x|^2 + \frac{545}{24}|x|^3 - \frac{63}{8}|x|^4 + \frac{25}{24}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 18 - \frac{153}{4}|x| + \frac{255}{8}|x|^2 - \frac{313}{24}|x|^3 + \frac{21}{8}|x|^4 - \frac{5}{24}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (61)$$

$$\Lambda_{4,3}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{28}{3}|x|^4 + \frac{145}{6}|x|^5 - \frac{245}{12}|x|^6 + \frac{35}{6}|x|^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ 31 - \frac{1945}{12}|x| + \frac{2905}{8}|x|^2 - \frac{5345}{12}|x|^3 + \frac{1281}{4}|x|^4 - \frac{1615}{12}|x|^5 \\ \quad + \frac{245}{8}|x|^6 - \frac{35}{12}|x|^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -297 + \frac{3501}{4}|x| - \frac{8775}{8}|x|^2 + \frac{3029}{4}|x|^3 - \frac{3731}{12}|x|^4 + \frac{911}{12}|x|^5 \\ \quad - \frac{245}{24}|x|^6 + \frac{7}{12}|x|^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (62)$$

$$\Lambda_{4,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 + \frac{1}{4}|x|^4 - \frac{100}{3}|x|^5 + \frac{455}{4}|x|^6 - \frac{295}{2}|x|^7 + \frac{345}{4}|x|^8 - \frac{115}{6}|x|^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -199 + \frac{5485}{4}|x| - \frac{32975}{8}|x|^2 + \frac{28425}{4}|x|^3 - \frac{61953}{8}|x|^4 + \frac{33175}{6}|x|^5 \\ \quad - \frac{20685}{8}|x|^6 + \frac{3055}{4}|x|^7 - \frac{1035}{8}|x|^8 + \frac{115}{12}|x|^9 & 1 \leq |x| < 2 \\ 5913 - \frac{89235}{4}|x| + \frac{297585}{8}|x|^2 - \frac{143895}{4}|x|^3 + \frac{177871}{8}|x|^4 - \frac{54641}{6}|x|^5 \\ \quad + \frac{19775}{8}|x|^6 - \frac{1715}{4}|x|^7 + \frac{345}{8}|x|^8 - \frac{23}{12}|x|^9 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (63)$$

$$\Lambda_{6,3}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 - \frac{959}{144}|x|^4 + \frac{2569}{144}|x|^5 - \frac{727}{48}|x|^6 + \frac{623}{144}|x|^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{138}{5} - \frac{8617}{60}|x| + \frac{12873}{40}|x|^2 - \frac{791}{2}|x|^3 + \frac{4557}{16}|x|^4 - \frac{9583}{80}|x|^5 \\ \quad + \frac{2181}{80}|x|^6 - \frac{623}{240}|x|^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -440 + \frac{25949}{20}|x| - \frac{117131}{72}|x|^2 + \frac{2247}{2}|x|^3 - \frac{66437}{144}|x|^4 + \frac{81109}{720}|x|^5 \\ \quad - \frac{727}{48}|x|^6 + \frac{623}{720}|x|^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{3632}{5} - \frac{7456}{5}|x| + \frac{58786}{45}|x|^2 - 633|x|^3 + \frac{26383}{144}|x|^4 - \frac{22807}{720}|x|^5 \\ \quad + \frac{727}{240}|x|^6 - \frac{89}{720}|x|^7 & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (64)$$

$$\Lambda_{6,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{3521}{144}|x|^5 + \frac{12029}{144}|x|^6 - \frac{15617}{144}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{1015}{72}|x|^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{877}{5} + \frac{72583}{60}|x| - \frac{145467}{40}|x|^2 + \frac{18809}{3}|x|^3 - \frac{54663}{8}|x|^4 + \frac{390327}{80}|x|^5 \\ \quad - \frac{182549}{80}|x|^6 + \frac{161777}{240}|x|^7 - \frac{1827}{16}|x|^8 + \frac{203}{24}|x|^9 & 1 \leq |x| < 2 \\ 8695 - \frac{656131}{20}|x| + \frac{3938809}{72}|x|^2 - \frac{158725}{3}|x|^3 + \frac{2354569}{72}|x|^4 - \frac{9644621}{720}|x|^5 \\ \quad + \frac{523589}{144}|x|^6 - \frac{454097}{720}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{203}{72}|x|^9 & 2 \leq |x| < 3 \\ -\frac{142528}{5} + \frac{375344}{5}|x| - \frac{3942344}{45}|x|^2 + \frac{178394}{3}|x|^3 - \frac{931315}{36}|x|^4 + \frac{5385983}{720}|x|^5 \\ \quad - \frac{1035149}{720}|x|^6 + \frac{127511}{720}|x|^7 - \frac{203}{16}|x|^8 + \frac{29}{72}|x|^9 & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (65)$$

$$\Lambda_{6,5}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{701}{8}|x|^6 + \frac{54803}{144}|x|^7 - \frac{32165}{48}|x|^8 + \frac{9555}{16}|x|^9 - \frac{38731}{144}|x|^{10} + \frac{3521}{72}|x|^{11} & 0 \leq |x| < 1 \\ 1233 - \frac{617533}{60}|x| + \frac{1544613}{40}|x|^2 - \frac{515179}{6}|x|^3 + \frac{502579}{4}|x|^4 - \frac{3809911}{30}|x|^5 \\ \quad + \frac{3618099}{40}|x|^6 - \frac{10894163}{240}|x|^7 + \frac{251685}{16}|x|^8 - \frac{172123}{48}|x|^9 + \frac{38731}{80}|x|^{10} - \frac{3521}{120}|x|^{11} & 1 \leq |x| < 2 \\ -181439 + \frac{16709441}{20}|x| - \frac{125352311}{72}|x|^2 + \frac{13002493}{6}|x|^3 - \frac{64445353}{36}|x|^4 + \frac{30912301}{30}|x|^5 \\ \quad - \frac{3373567}{8}|x|^6 + \frac{88345523}{720}|x|^7 - \frac{1194095}{48}|x|^8 + \frac{160657}{48}|x|^9 - \frac{38731}{144}|x|^{10} + \frac{3521}{360}|x|^{11} & 2 \leq |x| < 3 \\ 1188352 - \frac{19108864}{5}|x| + \frac{250837216}{45}|x|^2 - \frac{14600752}{3}|x|^3 + \frac{25437902}{9}|x|^4 - \frac{17195278}{15}|x|^5 \\ \quad + \frac{13253241}{40}|x|^6 - \frac{49136309}{720}|x|^7 + \frac{471205}{48}|x|^8 - \frac{45083}{48}|x|^9 + \frac{38731}{720}|x|^{10} - \frac{503}{360}|x|^{11} & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (66)$$

$$\Lambda_{6,6}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{1}{36}|x|^6 - \frac{46109}{144}|x|^7 + \frac{81361}{48}|x|^8 - \frac{544705}{144}|x|^9 + \frac{655039}{144}|x|^{10} \\ \quad - \frac{223531}{72}|x|^{11} + \frac{81991}{72}|x|^{12} - \frac{6307}{36}|x|^{13} & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{44291}{5} + \frac{1745121}{20}|x| - \frac{15711339}{40}|x|^2 + \frac{32087377}{30}|x|^3 - \frac{7860503}{4}|x|^4 + \frac{38576524}{15}|x|^5 \\ \quad - \frac{24659323}{10}|x|^6 + \frac{84181657}{48}|x|^7 - \frac{74009313}{80}|x|^8 + \frac{17159513}{48}|x|^9 - \frac{7870247}{80}|x|^{10} \\ \quad + \frac{438263}{24}|x|^{11} - \frac{81991}{40}|x|^{12} + \frac{6307}{60}|x|^{13} & 1 \leq |x| < 2 \\ 3905497 - \frac{424679647}{20}|x| + \frac{3822627865}{72}|x|^2 - \frac{2424839767}{30}|x|^3 + \frac{3009271097}{36}|x|^4 - \frac{930168127}{15}|x|^5 \\ \quad + \frac{305535494}{9}|x|^6 - \frac{9998313437}{720}|x|^7 + \frac{203720335}{48}|x|^8 - \frac{137843153}{144}|x|^9 + \frac{22300663}{144}|x|^{10} \\ \quad - \frac{6126883}{360}|x|^{11} + \frac{81991}{72}|x|^{12} - \frac{6307}{180}|x|^{13} & 2 \leq |x| < 3 \\ -\frac{255622144}{5} + \frac{971097344}{5}|x| - \frac{15295867328}{45}|x|^2 + \frac{5442932656}{15}|x|^3 - \frac{2372571796}{9}|x|^4 + \frac{2064517469}{15}|x|^5 \\ \quad - \frac{9563054381}{180}|x|^6 + \frac{2210666335}{144}|x|^7 - \frac{796980541}{240}|x|^8 + \frac{76474979}{144}|x|^9 - \frac{43946287}{720}|x|^{10} \\ \quad + \frac{343721}{72}|x|^{11} - \frac{81991}{360}|x|^{12} + \frac{901}{180}|x|^{13} & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (67)$$

$$\Lambda_{8,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{205}{144}x^2 + \frac{91}{192}x^4 - \frac{6181}{320}x^5 + \frac{6337}{96}x^6 - \frac{2745}{32}x^7 + \frac{28909}{576}x^8 - \frac{3569}{320}x^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -154 + \frac{12757}{12}x - \frac{230123}{72}x^2 + \frac{264481}{48}x^3 - \frac{576499}{96}x^4 + \frac{686147}{160}x^5 - \frac{96277}{48}x^6 + \frac{14221}{24}x^7 - \frac{28909}{288}x^8 + \frac{3569}{480}x^9 & 1 \leq |x| < 2 \\ \frac{68776}{7} - \frac{1038011}{28}x + \frac{31157515}{504}x^2 - \frac{956669}{16}x^3 + \frac{3548009}{96}x^4 - \frac{2422263}{160}x^5 + \frac{197255}{48}x^6 - \frac{19959}{28}x^7 + \frac{144545}{2016}x^8 - \frac{3569}{1120}x^9 & 2 \leq |x| < 3 \\ -56375 + \frac{8314091}{56}x - \frac{49901303}{288}x^2 + \frac{3763529}{32}x^3 - \frac{19648027}{384}x^4 + \frac{9469163}{640}x^5 - \frac{545977}{192}x^6 + \frac{156927}{448}x^7 - \frac{28909}{1152}x^8 + \frac{3569}{4480}x^9 & 3 \leq |x| < 4 \\ \frac{439375}{7} - \frac{64188125}{504}x + \frac{231125375}{2016}x^2 - \frac{17306975}{288}x^3 + \frac{7761805}{384}x^4 - \frac{2895587}{640}x^5 + \frac{129391}{192}x^6 - \frac{259715}{4032}x^7 + \frac{28909}{8064}x^8 - \frac{3569}{40320}x^9 & 4 \leq |x| < 5 \\ 0 & |x| \geq 5 \end{cases} \quad (68)$$

$$M'_8(x) = \begin{cases} \frac{5}{48}x^7 - \frac{11}{32}x^6 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{35}{24}x^2 + \frac{151}{168} & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{103}{112} - \frac{7}{30}x - \frac{7}{16}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{63}{16}x^4 - \frac{7}{3}x^5 + \frac{99}{160}x^6 - \frac{1}{16}x^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -\frac{139}{336} + \frac{217}{30}x - \frac{805}{48}x^2 + \frac{49}{3}x^3 - \frac{133}{16}x^4 + \frac{7}{3}x^5 - \frac{11}{32}x^6 + \frac{1}{48}x^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{128}{21} - \frac{256}{15}x + \frac{56}{3}x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{160}x^6 - \frac{1}{336}x^7 & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (69)$$

		Moments	Régularité	Nb points	Degré	Support	Implémentation		
							Fortran	Python	OpenCL
$\Lambda_{2,1} = M'_4$	(57)	2	C^1	4	3	$[-2; 2]$	✓	✓	✓
$\Lambda_{2,2}$	(58)	2	C^2	4	5	$[-2; 2]$	-	✓	✓
$\Lambda_{2,3}$	(59)	2	C^3	4	7	$[-2; 2]$	-	✓	✓
$\Lambda_{2,4}$	(60)	2	C^4	4	9	$[-2; 2]$	-	✓	✓
$\Lambda_{4,2} = M'_6$	(61)	4	C^2	6	5	$[-3; 3]$	✓	✓	✓
$\Lambda_{4,3}$	(62)	4	C^3	6	7	$[-3; 3]$	-	✓	✓
$\Lambda_{4,4}$	(63)	4	C^4	6	9	$[-3; 3]$	✓	✓	✓
$\Lambda_{6,3}$	(64)	6	C^3	8	7	$[-4; 4]$	-	✓	✓
$\Lambda_{6,4}$	(65)	6	C^4	8	9	$[-4; 4]$	✓	✓	✓
$\Lambda_{6,5}$	(66)	6	C^5	8	11	$[-4; 4]$	-	✓	✓
$\Lambda_{6,6}$	(67)	6	C^6	8	13	$[-4; 4]$	✓	✓	✓
$\Lambda_{8,4}$	(68)	8	C^4	10	9	$[-5; 5]$	✓	✓	✓
M'_8	(69)		C^4	8	7	$[-4; 4]$	✓	✓	✓

Table 1: Formules de remaillage disponibles.

Résumé des formules disponibles