

## Projection solénoïdale du champ de vorticité par décomposition de Helmholtz en dimension 3

L'algorithme de la méthode de projection est basé sur la décomposition de Helmholtz selon laquelle tout champ de vecteur peut se décomposer en deux parties : une partie solénoïdale (ie, à divergence nulle) et une partie irrotationnelle s'exprimant comme le gradient d'un potentiel scalaire :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{sol}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{irr}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{sol}} + \nabla \pi \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{sol}} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega}_{\text{irr}} = 0 \quad (3)$$

Ici, on applique la méthode de projection solénoïdale au champ de vorticité  $\boldsymbol{\omega}$  afin de garantir la divergence nulle de ce champ tout au long de la résolution des équations de Navier-Stokes. L'algorithme se déroule en deux étapes. Tout d'abord, une vorticité intermédiaire non solénoïdale  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  est calculée, puis dans un second temps le gradient du potentiel scalaire  $\pi$  est utilisé pour projeter la vorticité sur l'espace des champs de vorticité à divergence nulle. Le champ de vorticité à divergence nulle est donc obtenu en soustrayant à la vorticité intermédiaire sa partie irrotationnelle :

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{sol}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{irr}} \quad (4)$$

$$\iff \boldsymbol{\omega}_{\text{sol}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \pi \quad (5)$$

La résolution de cette équation se fait en prenant sa divergence :

$$\text{div}(\boldsymbol{\omega}_{\text{sol}}) = \text{div}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \Delta \pi \quad (6)$$

or  $\text{div}(\boldsymbol{\omega}_{\text{sol}}) = 0$  donc :

$$\text{div}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \Delta \pi = 0 \quad (7)$$

On obtient alors l'équation de Poisson suivante (pour des raisons de simplification d'écriture, la notation  $\tilde{\cdot}$  a été supprimée):

$$\Delta \pi = \text{div}(\boldsymbol{\omega}) \quad (8)$$

Pour résoudre cette équation on se place dans l'espace des fréquences en calculant sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\Delta \pi} = \widehat{\text{div}(\boldsymbol{\omega})} \quad (9)$$

$$\widehat{\text{div}(\omega)} = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 i \xi_j \widehat{\omega}_j \quad (10)$$

et

$$\widehat{\Delta \pi} = - |\xi|^2 \widehat{\pi} \quad (11)$$

Donc

$$- |\xi|^2 \widehat{\pi} = \sum_{j=1}^3 i \xi_j \widehat{\omega}_j \quad (12)$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{\pi} = -i \frac{\sum_{j=1}^3 \xi_j \widehat{\omega}_j}{|\xi|^2} \quad (13)$$

D'après l'équation (5) on a :

$$\widehat{\omega}' = \widehat{\omega}_{\text{sol}} = \widehat{\omega} - \widehat{\nabla \pi} \quad (14)$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{\omega}'_k = \widehat{\omega}_k - \widehat{\nabla \pi}_k, \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (15)$$

or  $\widehat{\nabla \pi}_k = i \xi_k \widehat{\pi}_k$ , ainsi on obtient :

$$\widehat{\omega}'_k = \widehat{\omega}_k - i \xi_k \widehat{\pi}_k \quad \Longleftrightarrow \quad (16)$$

$$\boxed{\widehat{\omega}'_k = \widehat{\omega}_k - \xi_k \frac{\sum_{j=1}^3 \xi_j \widehat{\omega}_j}{|\xi|^2}}, \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (17)$$