Utilisation de la relation de décroissance de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour valider l'implémentation de l'opérateur de diffusion

La définition générale de l'enstrophie $E(u)$ d'un écoulement fluide dans une région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est :

$$E(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

On considère les équations de Navier-Stokes pour un écoulement visqueux, incompressible et homogène, sans force extérieure :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nu \Delta u = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{3}$$

Avec une densité normalisée à 1, l'énergie $e(u)$ est donnée par :

$$e(u) = \int_\Omega \|u\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

Ici, on considère que l'énergie de l'écoulement fluide est réduite à l'énergie cinétique. On ne décrit pas l'énergie potentielle ou thermique.

Si la condition d'adhérence est respectée et si les intégrales convergent, on peut utiliser la condition d'incompressibilié pour effectuer une intégration par partie dans la définition de l'enstrophie donnée précédemment :

$$E(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \|u\| \|\Delta u\| \, \mathrm{d}x \tag{5}$$

or en utilisant la condition d'incompressibilité on obtient l'équation de Poisson suivante : $\Delta u = -\nabla \times \omega$ et ainsi :

$$\int_\Omega \|u\| \|\Delta u\| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \|u\| \|\nabla \times \omega\| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \|u\| \|\omega\| \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \|\omega\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{6}$$

On a donc :

$$E(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \|u\| \|\omega\| \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \|\omega\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{7}$$

or :

$$\int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \ \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\iff \int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x = e(u) \tag{9}$$

et :

$$\int_\Omega \|u\| \|\omega\| \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \|u\| \|\omega\| \ \mathrm{d}x \tag{10}$$

$$\iff \int_\Omega \|u\| \|\omega\| \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x = e(u) \tag{11}$$

ainsi :

$$E(u) = e(u) - e(u) + \int_\Omega \|\omega\|^2 \ \mathrm{d}x \tag{12}$$

$$\iff E(u) = \int_\Omega \|\omega\|^2 \ \mathrm{d}x \tag{13}$$

On suppose que l'on a une décroissance suffisante de la pression p et de la vitesse u à l'infini. On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = 0 \tag{14}$$

En prenant le produit scalaire avec $\frac{1}{2}u$ de cette équation et en l'intégrant sur Ω on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x - \nu \int_\Omega \|\Delta u\| \|u\| \ \mathrm{d}x = 0 \tag{15}$$

or

$$\int_\Omega \|\Delta u\| \|u\| \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \|u\| \|\omega\| \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \|\omega\|^2 \ \mathrm{d}x \tag{16}$$

avec $\int_\Omega \|u\| \|\omega\| \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \|\nabla u\| \|u\| \ \mathrm{d}x \to 0$ d'après les hypothèses

ainsi :

$$\int_\Omega \|\Delta u\| \|u\| \ \mathrm{d}x = - \int_\Omega \|\omega\|^2 \ \mathrm{d}x = -E(u) \tag{17}$$

On obtient donc que l'énergie décroit proportionnellement à l'enstrophie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \ e(u) = -\nu \ E(u) \tag{18}$$

$$\iff \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \|u\|^2 \ \mathrm{d}x = -\nu \int_\Omega \|\omega\|^2 \ \mathrm{d}x \tag{19}$$

Cette relation de proportionnalité peut-être utilisée pour valider l'implémentation de l'opérateur de diffusion dans les équations de Navier-Stokes. En effet, la viscosité effective du fluide ν_{eff} doit être retrouvée en calculant :

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\dfrac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \|u\|^2 \; \mathrm{d}x}{\int_\Omega \|\omega\|^2 \; \mathrm{d}x} \tag{20}$$