Setup pour test de l'anneau de vorticité

L'initialisation de ce test se fait avec un anneau défini par une gaussienne, comme présenté dans Shariff et al. (1994) :

$$\omega_\theta(\mathbf{x}, t=0) = \frac{\Gamma_0}{\pi\sigma^2} e^{-(s/\sigma)^2} \tag{1}$$

où Γ_0 représente la circulation à l'état initial, σ le rayon interne du tore et où $s^2 = (z - z_c)^2 + (|(x, y) - (x_c, y_c)| - R^2)$, avec (x_c, y_c, z_c) les coordonnées du centre du tore. θ correspond ici à la deuxième coordonnée torique (rappel : coordonnées toriques : $(\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, cf Figure, gauche)

Le passage des coordonnée toriques aux coordonnées cartésiennes de la vorticité se fait de la façon suivante (cf Figure, droite):

$$\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x \; sin(\theta) + \vec{e}_y \; cos(\theta) \tag{2}$$

ainsi :

$$\omega_x = -\omega_\theta \; sin(\theta) \tag{3}$$
$$\omega_y = \omega_\theta \; cos(\theta) \tag{4}$$
$$\omega_z = 0 \tag{5}$$

Soit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (x - x_c, y - y_c, 0)$, on peut alors exprimer $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$ en fonction de $\mathbf{x}$:

$$cos(\theta) = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \tag{6}$$
$$sin(\theta) = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \tag{7}$$

Les coordonnées cartésiennes de la vorticité sont donc données par:

$$\omega_x = -\omega_\theta \; \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \tag{8}$$
$$\omega_y = \omega_\theta \frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \tag{9}$$
$$\omega_z = 0 \tag{10}$$

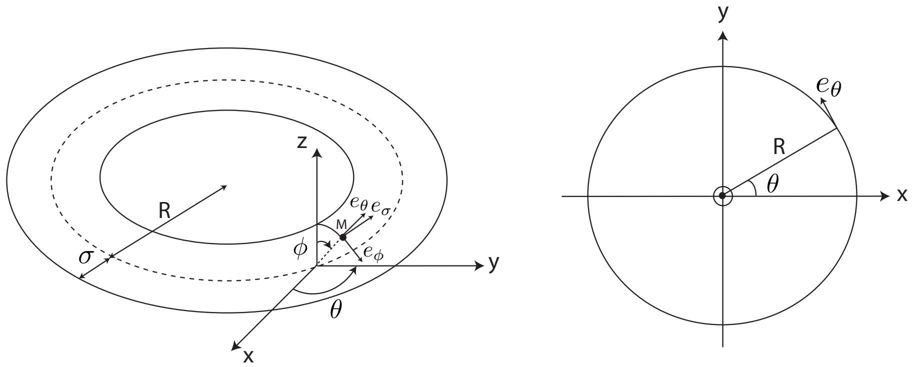

Figure 1: (gauche) Systèmes de coordonnées cartésiennes et toriques sur un anneau 3D, (droite) Systèmes de coordonnées cartésiennes et toriques dans le plan (xOy).

A intervalle de temps régulier, une perturbation de la position centrale de l'anneau est appliquée :

$$R'(\theta) = R_0[1 + \xi f(\theta)] \tag{11}$$

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta) \tag{12}$$

$$A_n^2 + B_n^2 = 1 \tag{13}$$

(source : Direct numerical simulation of vortex ring evolution from the laminar to the early turbulent regime, P. J. Archer, T. G. Thomas, G. N. Coleman, J. Fluid Mech. (2008), vol. 598, pp. 201–226)

Raisons de cette perturbation : Le but ici est de générer des anneaux de vorticité très épais, et donc ayant une forte circulation. Ce type d'anneaux a en effet son importance dans des applications telles que le contrôle d'écoulement par jets synthétiques. Dans les dispositifs expérimentaux (Gharib et al. (1998)), il n'est pas possible d'atteindre des hautes circulations lorsque la couche limite est fine. Quand le maximum de la vitesse axiale atteint la vitesse de la couche limite cette dernière subit une force dirigée vers l'axe de symétrie; elle ne peut alors plus élargir l'anneau de vorticité principal puisque son intensité tend vers zero lorsque $\sigma = 0$. Ainsi, en forçant la couche limite à s'éloigner de l'axe de symétrie (en augmentant R en fonction du temps), il devient possible de générer plus de circulation dans l'anneau.

(source : paragraphe 4.4 dans Numerical experiments on vortex ring formation, K. Mohseni, H. Ran and T. Colonius, J. Fluid Mech. (2001), vol. 430, pp. 267–282)

Afin d'assurer la divergence nulle de la vorticité, une projection de Helmholtz est effectuée après chaque perturbation de R. (cf documentation sur la projection de Helmholtz)

Paramètres numériques choisis pour les simulations :

$\Omega = [0,6] \times [0,6] \times [0,6]$
$(x_c, y_c, z_c) = (3,3,3)$
resolution $= 128^3$ ou 256^3
pour $Re_\Gamma = 750$, Γ_0=0.0075 et $\nu = 10^-5$
pour $Re_\Gamma = 7500$, Γ_0=0.0075 et $\nu = 10^-6$
$R_0 = 3\sigma$=1.5
$\xi = 0.01$ (amplitude de la perturbation du centre de l'anneau)