Correction de vitesse pour la modélisation d'un écoulement incompressible dans une boîte

Lors de la résolution de l'équation de Poisson $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \boldsymbol{\omega}$, le mode 0 des transformées de Fourier rapides de la vitesse est imposé à 0, ce qui entraîne une modification des valeurs moyennes des composantes de la vitesse et donc des composantes de la vitesse elles-mêmes lorsque la transformée de Fourier inverse est appliquée. Une correction de la vitesse est donc nécessaire après la résolution de l'équation de Poisson, à chaque itération.

On introduit la notation suivante pour exprimer la vitesse corrigée :

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}} \tag{1}$$

où $\widetilde{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse en sortie de FFT et où $\overline{\mathbf{u}}$ dénote la moyenne en espace de la vitesse, que l'on cherche ici à déterminer. L'écoulement s'effectue dans la direction x et la vitesse est initialisée en posant $\mathbf{u}(t=0) = (u_x, u_y, u_z) = (u_\infty, 0, 0)$.

$\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent $\dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} = \dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} = \dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial z} = 0$. Ainsi le champ de vorticité moyen en espace est donné en 2D par :

$$\overline{\omega} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \tag{2}$$

et en 3D par :

$$\overline{\omega_x} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z} \tag{3}$$

$$\overline{\omega_y} = -\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} \tag{4}$$

$$\overline{\omega_z} = -\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} \tag{5}$$

La correction de la vitesse se fait par réajustement du débit à l'entrée du domaine de calcul. Cette correction est développée ci-dessous composante par composante tout d'abord en 2D puis sera étendue au cas 3D.

2D

<u>Correction de u_x</u>:

On note B le coté correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\int_B u_x \, dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} \, dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{u_x} \, dy \tag{6}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\int_B u_x \, dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_x} \, dy}_{\text{débit calculé}} + L_y \overline{u_x} \tag{7}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{u_x} = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y} \tag{8}$$

où L_y dénote la longueur du coté B. Or le débit que l'on souhaite imposer à l'entrée du domaine est égal à $u_\infty L_y$ et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u_x} + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \tag{9}$$

<u>Correction de u_y:</u>

$\overline{u_y}$ est un flux invariant en y.
En effet, la vitesse est a divergence nulle, donc la moyenne en espace de la vitesse l'est également et ainsi $\partial_x \overline{u_x} + \partial_y \overline{u_y} = 0$. Or $\overline{u_x}$ est un flux constant en espace, par conséquent on a bien $\partial_y \overline{u_y} = 0$ (invariance de $\overline{u_y}$ en y).

$\overline{u_y}$ est donc un flux variant en x et d'après la relation 2 on a $\overline{u_y} = \overline{\omega} x + c$, avec c une constante. Ainsi :

$$\underbrace{\int_B u_y \, dy}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\int_B \widetilde{u_y} \, dy}_{\text{débit calculé}} + \int_B \overline{\omega} x \, dy + \int_B c \, dy \tag{10}$$

Or ici le débit souhaité est égal a 0. Donc :

$$0 = \underbrace{\int_B \widetilde{u_y} \, dy}_{\text{débit calculé}} + \overline{\omega} x_0 L_y + L_y c \tag{11}$$

$$\Longleftrightarrow c = -\frac{\text{débit calculé}}{L_y} - \overline{\omega} x_0 \tag{12}$$

et donc :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u_y} + \overline{\omega} x - \overline{\omega} x_0 - \frac{\text{débit calculé}}{L_y}} \tag{13}$$

où x_0 dénote la coordonnée dans la direction x du bord d'entrée du domaine de calcul.

3D

<u>Correction de u_x:</u>

On note S la surface correspondant au bord d'entrée du domaine de calcul. En partant de la décomposition 1 on a alors :

$$\underbrace{\iint\limits_S u_x \; dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint\limits_S \widetilde{u_x} \; dydz}_{\text{débit calculé}} + \iint\limits_S \overline{u_x} \; dydz \tag{14}$$

$$\iff \quad \overline{u_x} = \frac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} \tag{15}$$

et donc :

$$\boxed{u_x = \widetilde{u_x} + u_\infty - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z}} \tag{16}$$

<u>Correction de u_y:</u>

D'après la relation 5 on a $\overline{u_y} = \overline{\omega_z} x + c$ avec c une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_y = \widetilde{u_y} + \overline{\omega_z} x + c$. Ainsi,

$$\iint\limits_S u_y \; dydz = \iint\limits_S \widetilde{u_y} \; dydz + \iint\limits_S \overline{\omega_z} x \; dydz + \iint\limits_S c \; dydz \tag{17}$$

$$\iff \quad \underbrace{\iint\limits_S u_y \; dydz}_{\text{débit souhaité}} = \underbrace{\iint\limits_S \widetilde{u_y} \; dydz}_{\text{débit calculé}} + \overline{\omega_z} \; x_0 L_y L z + c L_y L_z \tag{18}$$

où x_0 désigne la coordonnée dans la direction x de la surface d'entrée S du domaine de calcul.

Donc $\quad c = \dfrac{\text{débit souhaité}}{L_y L_z} - \dfrac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} \; x_0$

Or le débit souhaité est égal a 0, par conséquent :

$$\boxed{u_y = \widetilde{u_y} + \overline{\omega_z} x - \frac{\text{débit calculé}}{L_y L_z} - \overline{\omega_z} \; x_0} \tag{19}$$

<u>Correction de u_z:</u>

Sur le même principe on a d'après la relation 4 que $\overline{u_z} = -\overline{\omega_y} x + c$ avec c une constante. D'après 1 on obtient donc que $u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y} x + c$. Ainsi en procédant de même que pour u_y on obtient :

$$\boxed{u_z = \widetilde{u_z} - \overline{\omega_y} x - \frac{\iint\limits_S \widetilde{u_z} \; dydz}{L_y L_z} + \overline{\omega_y} \; x_0} \tag{20}$$

Remarque :

Dans le cadre d'un écoulement autour d'un cylindre (2D) ou d'une sphère (3D), on peut également choisir l'écoulement potentiel comme condition initiale de l'écoulement.

Par décomposition de Helmholtz on a:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi \tag{21}$$

où la fonction courant ψ et le potentiel scalaire ϕ vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{div}\ (\psi) = 0, \qquad \nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{22}$$

Donc si l'écoulement est potentiel, c'est à dire irrotationnel, alors :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \tag{23}$$

et <u>en 2D</u>, la fonction courant et le potentiel scalaire sont liés par la relation suivante :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{24}$$

Ainsi $u_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ et $u_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

La fonction courant associée à un écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre de rayon R est exprimée de la façon suivante :

$$\psi = u_\infty y \left(1 + \frac{R^2}{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}\right) \tag{25}$$

avec (x_C, y_C) les coordonnées du centre du cylindre dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Ainsi l'expression du débit souhaité, intervenant dans l'équation 8, est désormais donnée par :

$$\underbrace{\int_B u_x\ dy}_{\text{débit souhaité}} = \int_B \frac{\partial\psi}{\partial y}\ dy = [\psi]_B = \left[u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{(x_0 - x_C)^2 - (y - y_C)^2}\right)\right]_B \tag{26}$$

<u>En 3D</u>, il est pratique d'exprimer le potentiel d'un écoulement autour d'une sphère de rayon R dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ), dans lequel l'angle dans la direction azimutale θ est mesuré à partir de la direction de l'écoulement. Dans ce système de coordonnées, le potentiel est indépendant de l'angle méridional φ et est donné par :

$$\phi_{\text{sph}} = u_\infty r\ \cos\theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \tag{27}$$

Ainsi, les composantes de la vitesse en coordonnées sphériques sont les suivantes:

$$\mathbf{u}_{\text{sph}} = \nabla\phi_{\text{sph}} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) \tag{28}$$

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = u_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \tag{29}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -u_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \tag{30}$$

$$u_\varphi = 0 \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, le potentiel est donc donné par :

$$\phi_{\text{cart}} = u_\infty x \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \tag{33}$$

où $x = r\cos\theta$ et $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$, avec (x_S, y_S, z_S) les coordonnées du centre de la sphère dans le repère cartésien du domaine de calcul.

Les composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\mathbf{u}_{\text{cart}} = \nabla\phi_{\text{cart}} = (u_x, u_y, u_z) \tag{34}$$

$$u_x = u_\infty \left(1 - \frac{3R^3x^2}{2r^5} + \frac{R^3}{2r^3}\right) \tag{35}$$

$$u_y = -u_\infty \frac{3R^3xy}{2r^5} \tag{36}$$

$$u_z = -u_\infty \frac{3R^3xz}{2r^5} \tag{37}$$