Simulation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour un écoulement incompressible

1 Modèle, terme baroclinique et description physique

Dans un fluide présentant des densités différentes, un terme source apparaît dans l'équation de transport de la vorticité lorsque les surfaces de densité constante (surfaces isopycnes) et les surfaces de pression constante (surfaces isobares) ne sont pas alignées. Cette équation de transport de la vorticité (VTE) est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes en formulation vitesse-pression:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse de l'écoulement, ω est la vorticité, p est la pression, ρ est la densité et $\mathbf{g}$ la force de gravité.

La VTE est alors donnée par :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \omega - \nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \omega + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\nabla \rho \times \nabla p}_{\text{contribution baroclinique}} \tag{4}$$

Le contribution baroclinique est donc donnée par le vecteur :

$$\frac{1}{\rho^2}\nabla \rho \times \nabla p = \frac{\nabla \rho}{\rho} \times \frac{\nabla p}{\rho} \tag{5}$$

Afin d'éviter le calcul explicite de la pression (qui n'est pas directement nécessaire dans la formulation en vorticité de l'équation de Navier-Stokes), on peut exprimer le gradient de pression de la façon suivante, à l'aide de l'équation 1 :

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{g}, \tag{6}$$

ainsi la VTE est donc alternativement donnée par :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \omega - \frac{\nabla \rho}{\rho} \times \left(-\frac{\nabla p}{\rho}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \omega \underbrace{-\frac{\nabla \rho}{\rho} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{g}\right)}_{\text{contribution baroclinique}} \tag{8}$$

Le vecteur baroclinique intervient aussi bien dans les écoulements compressibles que dans les écoulements incompressibles (mais hétérogènes). Les modes instables de Rayleigh–Taylor peuvent être analysés à partir de ce vecteur baroclinique. Il joue également un rôle prépondérant dans la création de vorticité par le passage de chocs à travers un milieu hétérogène, comme dans l'instabilité de Richtmeyer–Meshkov.

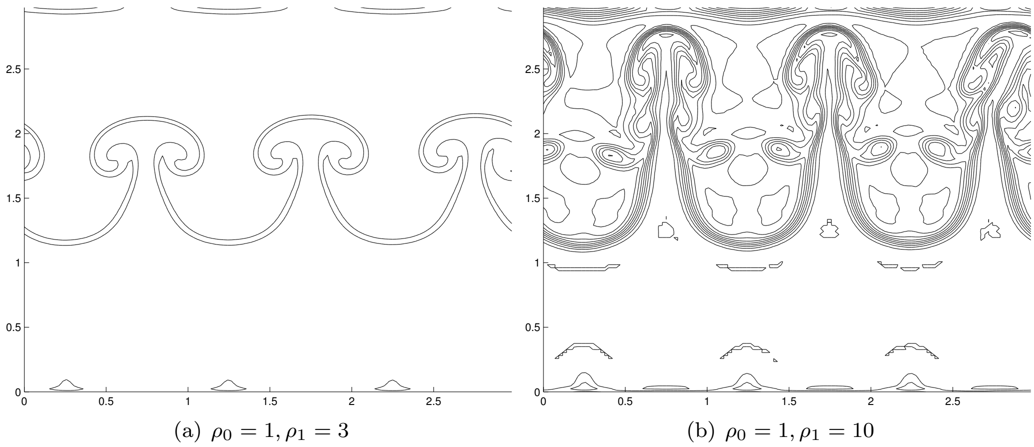
Lorsque l'interface entre deux surfaces de densité différente n'est pas horizontale et que le système est proche de l'équilibre hydrostatique, le gradient de pression est vertical mais le gradient de densité ne l'est pas. Par conséquent, le vecteur baroclinique est non nul ce qui provoque une création de vorticité entraînant un soulèvement de l'interface.

L'instabilité de Rayleigh–Taylor, est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, qui résulte de la poussée du fluide le plus lourd sur le fluide le plus léger (l'accélération dans le cas d'un système dynamique ou la gravité pour un système initialement statique est dirigée vers la phase légère). Considérons deux couches de fluides non miscibles superposées dans deux plans parallèles, la plus lourde surplombant la plus légère et toutes deux soumises à la pesanteur terrestre. L'équilibre est instable à la moindre perturbation : toute perturbation va s'amplifier et libérer de l'énergie potentielle, le fluide le plus lourd gagnant progressivement la moitié inférieure sous l'effet du champ de gravitation, et le fluide léger passe au-dessus.

En effet, lorsqu'on échange un volume de fluide léger, situé près de l'interface entre les deux fluides, avec un même volume de fluide lourd de l'autre côté de cette interface, l'énergie potentielle de gravitation du système diminue tout comme son énergie totale. C'est la tendance naturelle de ce système à minimiser son énergie potentielle de gravitation qui crée l'instabilité. Cette perte d'énergie est compensée par l'augmentation d'une autre forme d'énergie : l'énergie cinétique. En résumé, le fluide lourd va passer sous le léger (et le léger sur le lourd, par symétrie), et ce mouvement s'accompagne forcément d'une création d'énergie cinétique. Au contraire, dans le cas des vagues, si le fluide léger supérieur s'engouffre dans le fluide lourd inférieur, la poussée d'Archimède tend à ramener le fluide léger à sa position initiale : il y a donc au contraire stabilité et propagation d'ondes à l'interface.

2 Simulations

Les paramètres donnés dans cette section sont ceux permettant d'obtenir les résultats présentés dans la figure 2.



(a) $\rho_0 = 1, \rho_1 = 3$

(b) $\rho_0 = 1, \rho_1 = 10$

Figure 1: Instabilité de Rayleigh-Taylor (résultats 2D de Georges-Henri).

- $\Omega = [0,\ 3] \times [0,\ 3]$ (GH),
  $\Omega = [-1.5,\ 1.5] \times [-1.5,\ 1.5] \times [-0.0625,\ 0.0625]$ (Parmes)

- res $= 288 \times 288 \times 12$ (Parmes)
- $\Delta t = 0.005$
- $\nu = 10^{-4}$ (Parmes)
- $\mathbf{u}_{\text{init}} = (u_x, u_y, u_z)$ avec :

$$u_x = -\frac{2yA}{\sigma\lambda} \cos(\lambda) \exp\left(-\left(\frac{y-y_c}{\sigma}\right)^2\right) \tag{9}$$

$$u_y = A \sin(\lambda) \exp\left(-\left(\frac{y-y_c}{\sigma}\right)^2\right) \tag{10}$$

$$u_z = 0 \tag{11}$$

- $A = 0.02$
- $\lambda = 3.\ 2\pi\ x/L_x$
- $\sigma = 0.4$

attention : Le paramètre λ en rouge dans l'équation 9 n'est pas présent dans l'expression de $\mathbf{u}_{\text{init}}$ permettant d'obtenir les résultats de la figure 2, mais sa présence est nécessaire pour satisfaire la condition d'incompressibilité. D'autre part, ce champ de vitesse initial $\mathbf{u}_{\text{init}}$ n'est à divergence nulle que si $y_c = 0$, c'est à dire si la coordonnées en y du milieu du domaine est égale à 0, ce qui n'est pas le cas dans le benchmark considéré ici.

- $\log(\rho_0) = \log(1)$ si $y > y_c$
  $\log(\rho_1) = \log(3)$ ou $\log(10)$ si $y \leq y_c$
  ρ_0 : densité de la phase inférieure (la plus légère)
  ρ_1 : densité de la phase supérieure (la plus dense).

  Remarque : le fait de transporter $\log(\rho)$ au lieu de ρ permet d'avoir une meilleure régularité au niveau de l'interface raide (qui mathématiquement n'est pas définie). En procédant de la sorte, et de part la relation $\nabla(\log(\rho)) = \nabla\rho/\rho$, la contribution baroclinique donnée dans l'équation 8 s'exprime désormais :

$$-\nabla(\log(\rho)) \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{g}\right). \tag{12}$$

  Une autre possibilité consiste à lisser la valeur du champ de densité au voisinage de l'interface sur une épaisseur 2δ en utilisant par exemple la fonction d'erreur (aussi appelée fonction d'erreur de Gauss) Erf (figure 2) :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t. \tag{13}$$

  où le champ de densité sera alors défini par :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si} \quad y > y_c + \delta \\ \rho_1 & \text{si} \quad y < y_c - \delta \\ \dfrac{\rho_1 + \rho_0}{2}\left(1 + \dfrac{\rho_1 - \rho_0}{2}\ \operatorname{erf}\left(\dfrac{y - y_c}{\delta}\right)\right) & \text{si} \quad |y - y_c| \leq \delta \end{cases} \tag{14}$$

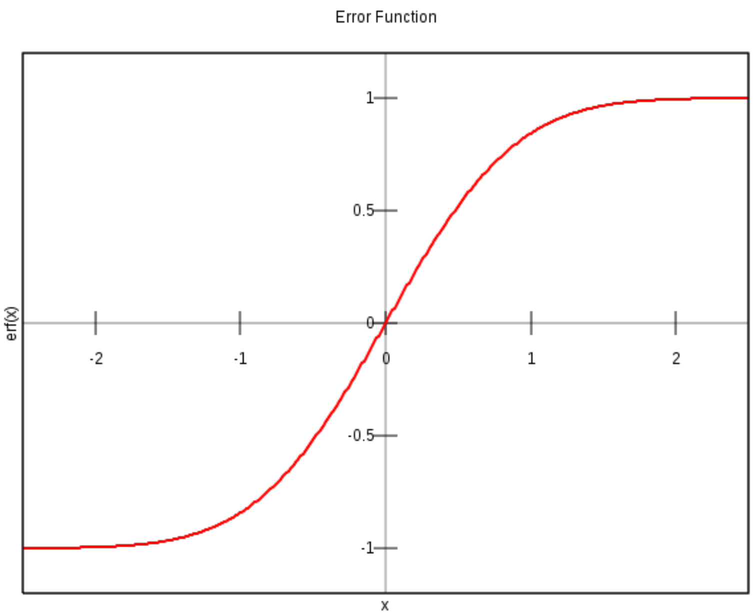
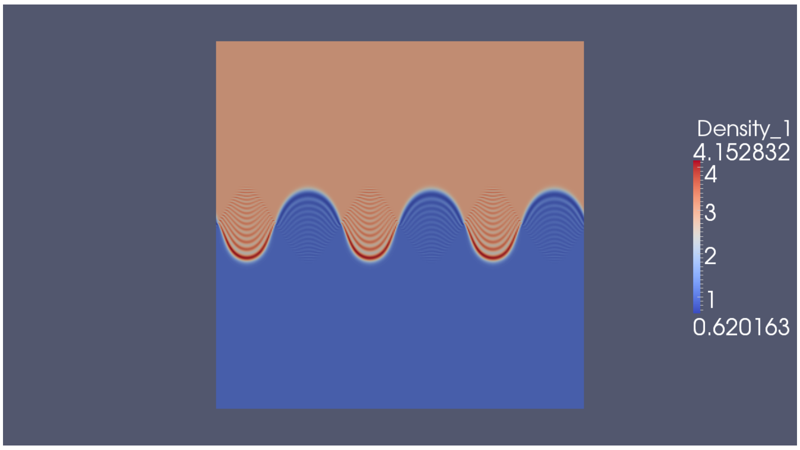
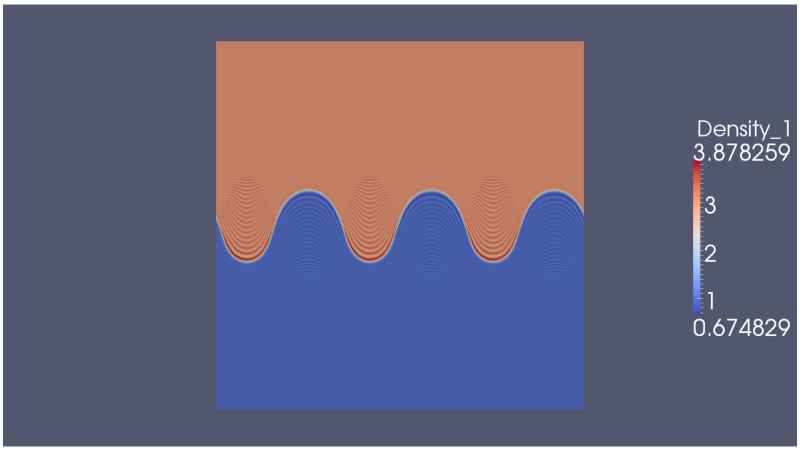


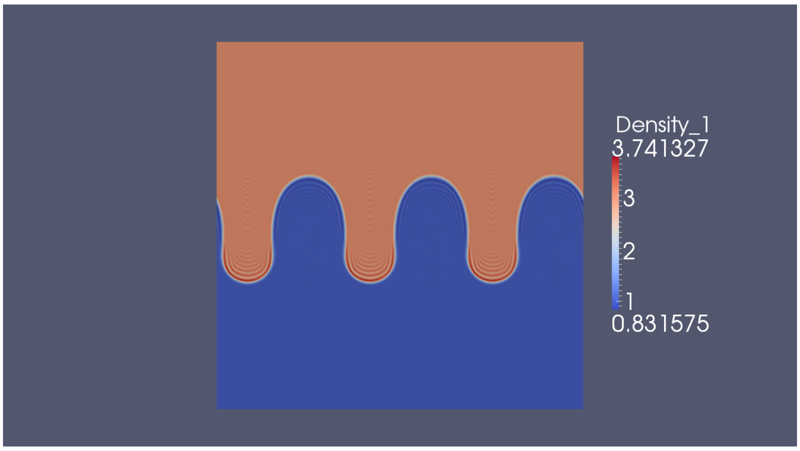
Figure 2: Fonction d'erreur Erf.



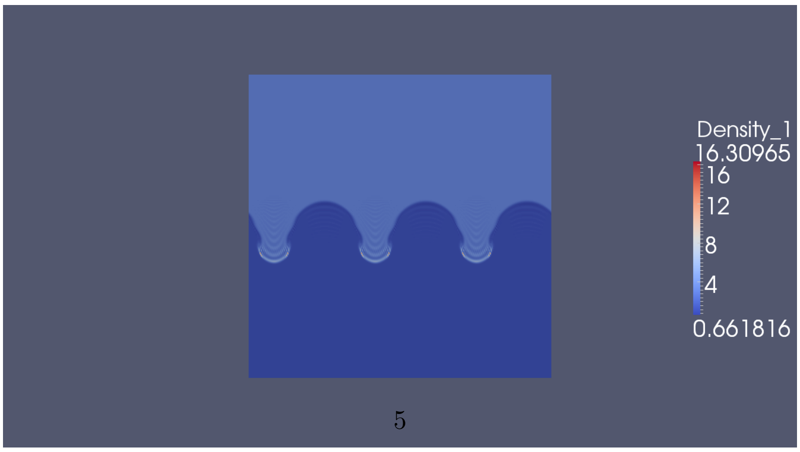
(a) transport de $\log(\rho), \Lambda_2$ corrigé, $T = 19$



(b) transport de $\log(\rho), \Lambda_4$ corrigé, $T = 18$

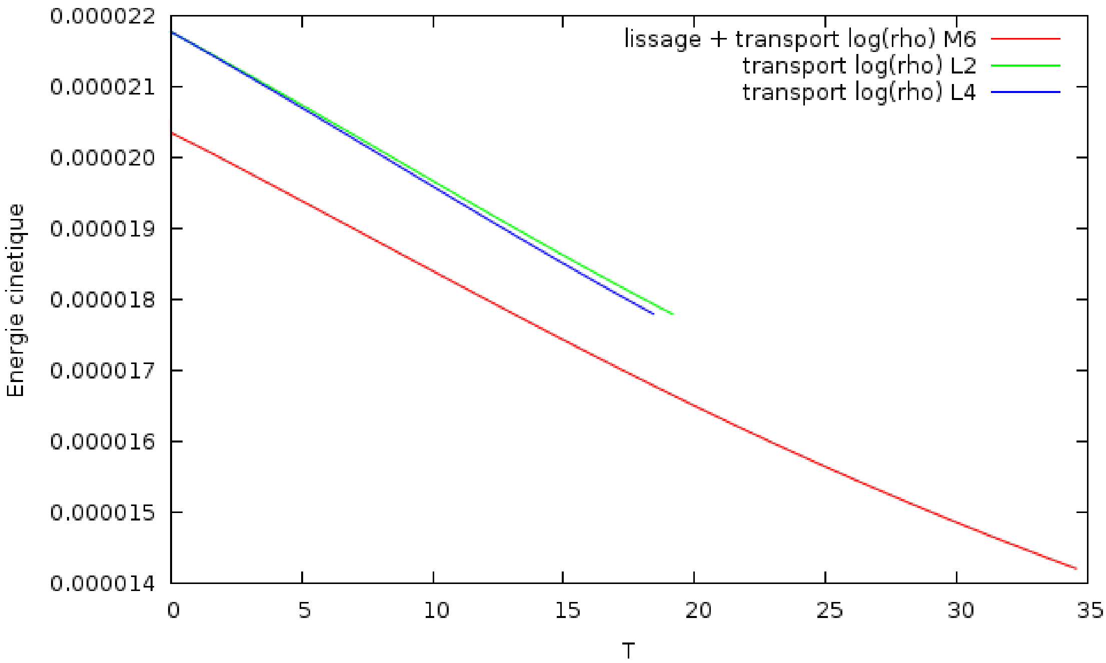


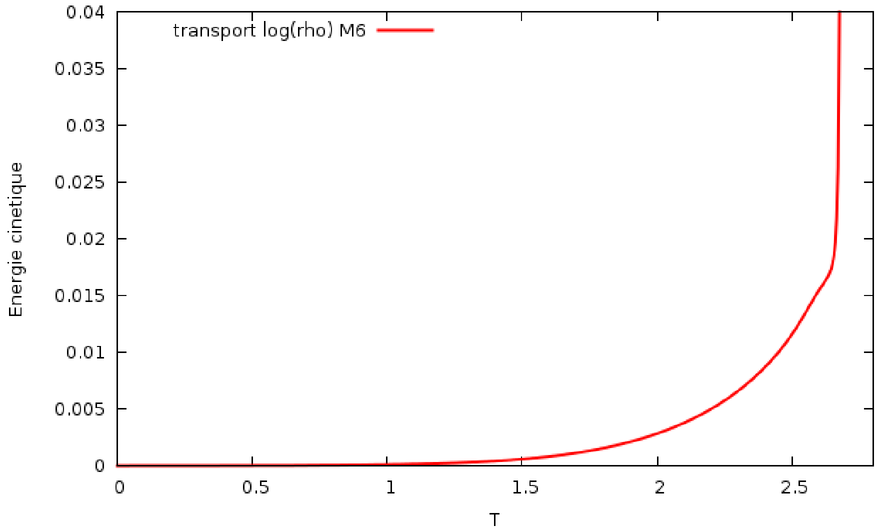
(c) lissage + transport de $\log(\rho), \Lambda_{4,2}$, $T = 34$



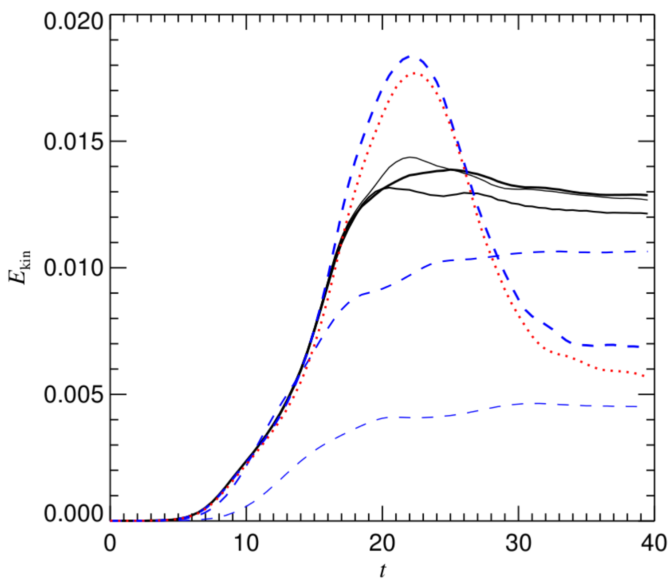
(d) transport de $\log(\rho), \Lambda_{4,2}$, $T = 2.7$

Figure 3: Résultats (PARMES)


lissage + transport log(rho) M6
transport log(rho) L2
transport log(rho) L4
Energie cinetique
T
0.000022
0.000021
0.000020
0.000019
0.000018
0.000017
0.000016
0.000015
0.000014
0
5
10
15
20
25
30
35



(a) transport de $\log(\rho), \Lambda_{4,2}$



(b) référence Springel. $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 2$,
$u_y$init $= 0.025\ (1 - \cos(4.0\pi x))(1.0 - \cos(4.0\pi y/3.0))$