Projection solenoidale du champ de vorticité par décomposition de Helmholtz en dimension 3

L'algorithme de la méthode de projection est basé sur la décomposition de Helmholtz selon laquelle tout champ de vecteur peut se décomposer en deux parties : une partie solenoidale (ie, à divergence nulle) et une partie irrotationelle s'exprimant comme le gradient d'un potentiel scalaire :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_{sol}} + \boldsymbol{\omega_{irr}} = \boldsymbol{\omega_{sol}} + \nabla\boldsymbol{\pi} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega_{sol}} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega_{irr}} = 0 \tag{3}$$

Ici, on applique la méthode de projection solenoidale au champ de vorticité ω afin de garantir la divergence nulle de ce champ tout au long de la résolution des équations de Navier-Stokes. L'algorithme se déroule en deux étapes. Tout d'abord, une vorticité intermédiaire non solénoidale $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ est calculée, puis dans un second temps le gradient du potentiel scalaire $\boldsymbol{\pi}$ est utilisé pour projeter la vorticité sur l'espace des champs de vorticité à divergence nulle. Le champ de vorticité à divergence nulle est donc obtenu en soustrayant à la vorticité intermédiaire sa partie irrotationnelle :

$$\boldsymbol{\omega_{sol}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega_{irr}} \tag{4}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{\omega_{sol}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \nabla\boldsymbol{\pi} \tag{5}$$

La résolution de cette équation se fait en prenant sa divergence :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\omega_{sol}}) = \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \Delta\boldsymbol{\pi} \tag{6}$$

or $\mathbf{div}(\boldsymbol{\omega_{sol}}) = 0$ donc :

$$\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \Delta\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{7}$$

On obtient alors l'équation de Poisson suivante (pour des raisons de simplification d'écriture, la notation $\tilde{\cdot}$ a été supprimée):

$$\Delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{div}(\boldsymbol{\omega}) \tag{8}$$

Pour résoudre cette équation on se place dans l'espace des fréquences en calculant sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\Delta\boldsymbol{\pi}} = \widehat{\mathbf{div}(\boldsymbol{\omega})} \tag{9}$$

$$\widehat{\mathbf{div}(\boldsymbol{\omega})} = \left(\widehat{\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\omega_j}}{\partial x_j}} \right) = \sum_{j=1}^{3} i\boldsymbol{\xi}_j \widehat{\boldsymbol{\omega}}_j \tag{10}$$

et

$$\widehat{\Delta \boldsymbol{\pi}} = - \mid \boldsymbol{\xi} \mid^2 \widehat{\boldsymbol{\pi}} \tag{11}$$

Donc

$$- \mid \xi \mid^2 \widehat{\boldsymbol{\pi}} = \sum_{j=1}^{3} i\boldsymbol{\xi}_j \widehat{\boldsymbol{\omega}}_j \tag{12}$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{\boldsymbol{\pi}} = -i \frac{\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\xi}_j \widehat{\boldsymbol{\omega}}_j}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2} \tag{13}$$

D'après l'équation (5) on a :

$$\widehat{\boldsymbol{\omega'}} = \widehat{\boldsymbol{\omega_{\mathbf{sol}}}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}} - \widehat{\nabla \boldsymbol{\pi}} \tag{14}$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{\boldsymbol{\omega'}}_k = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_k - \widehat{\nabla \boldsymbol{\pi}}_k, \ 1 \leq k \leq 3 \tag{15}$$

or $\widehat{\nabla \boldsymbol{\pi}}_k = i\boldsymbol{\xi}_k \widehat{\boldsymbol{\pi}}_k$, ainsi on obtient :

$$\widehat{\boldsymbol{\omega'}}_k = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_k - i\boldsymbol{\xi}_k \widehat{\boldsymbol{\pi}}_k \quad \Longleftrightarrow \tag{16}$$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\omega'}}_k = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{\xi}_k \frac{\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\xi}_j \widehat{\boldsymbol{\omega}}_j}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}}, \ 1 \leq k \leq 3 \tag{17}$$

Un critère de reprojection peut-être donné par :

$$\max_x \left(\frac{|\mathrm{div}(\omega)|}{\max_x \left| \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} \right|} \right) \geq c \tag{18}$$

avec c une constante fixée inférieure à 1, de l'ordre de 1-10%.

Remarque :

Calculer le rotationnel de **u** (c'est à dire calculer la vorticité à partir du champ de vitesse) revient à projeter la vorticité dans l'espace des champs à divergence nulle.

Proof. L'équation de Poisson sur la vitesse est donnée par :

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\omega} \tag{19}$$

ainsi, en passant dans l'espace des fréquences on obtient :

$$\widehat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{\boldsymbol{\omega}} \tag{20}$$

c'est à dire :

$$\widehat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\ (i\boldsymbol{\xi}\times\widehat{\boldsymbol{\omega}}) \tag{21}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\omega}} &= \widehat{\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}} && (22)\\ &= i\boldsymbol{\xi}\times\widehat{\mathbf{u}} && (23)\\ &= i\boldsymbol{\xi}\times\left(\frac{1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\ (i\boldsymbol{\xi}\times\widehat{\boldsymbol{\omega}})\right) && (24) \end{aligned}$$

donc d'après l'égalité du double produit vectoriel

$$a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c, \tag{25}$$

on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\omega}} &= \widehat{\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}} && (26)\\ &= (i\boldsymbol{\xi}\cdot\widehat{\boldsymbol{\omega}})\frac{1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\ i\boldsymbol{\xi} - \left(i\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\ i\boldsymbol{\xi}\right)\widehat{\boldsymbol{\omega}} && (27)\\ &= -\boldsymbol{\xi}\ \frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\widehat{\boldsymbol{\omega}})}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2} + \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2}\ \widehat{\boldsymbol{\omega}} && (28)\\ &= -\boldsymbol{\xi}\ \frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\widehat{\boldsymbol{\omega}})}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2} + \widehat{\boldsymbol{\omega}} && (29)\\ &= \widehat{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{sol}}} \qquad \text{d'après l'équation 17} && (30) \end{aligned}$$

Par conséquent l'égalité suivante est vérifiée :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{sol}}} \tag{31}$$

□