

Calcul des formules $\Lambda_{n,k}^*$

4 juillet 2013

Table des matières

1 Génération des formules	1
2 Formules	2
3 Code	5
4 Formules avec diffusion	10

1 Génération des formules

Les formules de remaillage de la forme $\Lambda_{n,k}^*$ sont des fonctions polynomiales par morceaux, symétriques, de support $] -n/2 - 1, n/2 - 1[$, de régularité C^k qui conservent les n premiers moments. La formule est donnée par morceaux sur les intervalles entiers par un polynôme p_i de degré $2k + 1$, soit $n + 2$ polynômes. Les différentes formules générées sont résumées dans le tableau 1.

Les contraintes sont les suivantes :

- Symétrie (seulement $n/2 + 1$ polynômes à chercher)

$$\Lambda_{n,k}(x) = \Lambda_{n,k}(-x) \quad (1)$$

$$\Lambda_{n,k}^* = \begin{cases} p_i(x) & \text{si } |x| \in [n/2 - i; n/2 + 1 - i[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} c_{i,j} x^j, \quad i = 0, \dots, n/2 + 1 \quad (3)$$

- Raccords C^k entre les polynômes
- Conservation des moments discrets :

$$\sum_{l=-N}^N l^q \Lambda_{n,k}^*(s - l) = s^q, \quad 0 < s < 1, q = 0 \dots n \quad (4)$$

Ainsi, par ces contraintes, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les coefficients $c_{i,k}$. Le nombre d'équation est bien supérieur au nombre d'inconnues.

Remarque 1 : pour chaque formule obtenue, les moments continus sont conservés :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^q \Lambda_{n,k}^*(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Remarque 2 : on obtient une formule exacte aux points de coordonnées entières :

$$\Lambda_{n,k}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i \in \{-n/2 + 1, \dots, n/2 - 1\} \quad (6)$$

		Moments	Régularité	Nb points	Degré	Support	Temps de calcul	
							Python ¹	OpenCL ²
$\Lambda_{2,1}^* = M'_4$	(7)	2	C^1	4	3	$[-2; 2]$	2.336	0.03855
$\Lambda_{2,2}^*$	(8)	2	C^2	4	5	$[-2; 2]$		0.03869
$\Lambda_{2,3}^*$	(9)	2	C^3	4	7	$[-2; 2]$		0.03857
$\Lambda_{2,4}^*$	(10)	2	C^4	4	9	$[-2; 2]$		0.03853
$\Lambda_{4,2}^* = M'_6$	(11)	4	C^2	6	5	$[-3; 3]$	5.0568	0.04336
$\Lambda_{4,3}^*$	(12)	4	C^3	6	7	$[-3; 3]$	6.3405	0.04327
$\Lambda_{4,4}^*$	(13)	4	C^4	6	9	$[-3; 3]$	7.9679	0.04348
M'_8	(19)	5	C^4	8	7	$[-4; 4]$	10.3966	0.04801
$\Lambda_{6,3}^*$	(14)	6	C^3	8	7	$[-4; 4]$	9.2680	0.04795
$\Lambda_{6,4}^*$	(15)	6	C^4	8	9	$[-4; 4]$	10.6613	0.04841
$\Lambda_{6,5}^*$	(16)	6	C^5	8	11	$[-4; 4]$	12.3911	0.04853
$\Lambda_{6,6}^*$	(17)	6	C^6	8	13	$[-4; 4]$	14.1645	0.06570
$\Lambda_{8,4}^*$	(18)	8	C^4	10	9	$[-5; 5]$		0.07060

TABLE 1: Caractéristiques des formules de remaillage. Le temps de calcul qualitatif est donné par itérations pour un problème 2D.

2 Formules

$$M'_4 = \Lambda_{2,1}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}|x|^2 + \frac{3}{2}|x|^3 & 0 \leq |x| < 1 \\ 2 - 4|x| + \frac{5}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x|^3 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (7)$$

1. 256² particules, RK2.
2. 2048² particules, RK2.

$$\Lambda_{2,2}^*(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 - \frac{9}{2}|x|^3 + \frac{15}{2}|x|^4 - 3|x|^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + 18|x| - 29|x|^2 + \frac{43}{2}|x|^3 - \frac{15}{2}|x|^4 + |x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\Lambda_{2,3}^*(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - 15x^4 + (\frac{75}{2})x^5 - (\frac{63}{2})x^6 + 9x^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ 32 - 168x + 376x^2 - 460x^3 + 330x^4 - (\frac{277}{2})x^5 + (\frac{63}{2})x^6 - 3x^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\Lambda_{2,4}^*(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - (\frac{105}{2})x^5 + (\frac{357}{2})x^6 - 231x^7 + 135x^8 - 30x^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -208 + 1432x - 4304x^2 + 7420x^3 - 8085x^4 + (\frac{11543}{2})x^5 - (\frac{5397}{2})x^6 + 797x^7 - 135x^8 + 10x^9 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (10)$$

$$M'_6 = \Lambda_{4,2}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{35}{12}|x|^3 + \frac{21}{4}|x|^4 - \frac{25}{12}|x|^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + \frac{75}{4}|x| - \frac{245}{8}|x|^2 + \frac{545}{24}|x|^3 - \frac{63}{8}|x|^4 + \frac{25}{24}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 18 - \frac{153}{4}|x| + \frac{255}{8}|x|^2 - \frac{313}{24}|x|^3 + \frac{21}{8}|x|^4 - \frac{5}{24}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (11)$$

$$\Lambda_{4,4}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{28}{3}|x|^4 + \frac{145}{6}|x|^5 - \frac{245}{12}|x|^6 + \frac{35}{6}|x|^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ 31 - \frac{1945}{12}|x| + \frac{2905}{8}|x|^2 - \frac{5345}{12}|x|^3 + \frac{1281}{4}|x|^4 - \frac{1615}{12}|x|^5 + \frac{245}{8}|x|^6 - \frac{35}{12}|x|^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -297 + \frac{3501}{4}|x| - \frac{8775}{8}|x|^2 + \frac{3029}{4}|x|^3 - \frac{3731}{12}|x|^4 + \frac{911}{12}|x|^5 - \frac{245}{24}|x|^6 + \frac{7}{12}|x|^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (12)$$

$$\Lambda_{4,4}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}|x|^2 + \frac{1}{4}|x|^4 - \frac{100}{3}|x|^5 + \frac{455}{4}|x|^6 - \frac{295}{2}|x|^7 + \frac{345}{4}|x|^8 - \frac{115}{6}|x|^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -199 + \frac{5485}{4}|x| - \frac{32975}{8}|x|^2 + \frac{28425}{4}|x|^3 - \frac{61953}{8}|x|^4 + \frac{33175}{6}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ 5913 - \frac{89235}{4}|x| + \frac{297585}{8}|x|^2 - \frac{143895}{4}|x|^3 + \frac{177871}{8}|x|^4 - \frac{54641}{6}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad (13)$$

$$\Lambda_{6,3}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 - \frac{959}{144}|x|^4 + \frac{2569}{144}|x|^5 - \frac{727}{48}|x|^6 + \frac{623}{144}|x|^7 & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{138}{5} - \frac{8617}{60}|x| + \frac{12873}{40}|x|^2 - \frac{791}{2}|x|^3 + \frac{4557}{16}|x|^4 - \frac{9583}{80}|x|^5 + \frac{2181}{80}|x|^6 - \frac{623}{240}|x|^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -440 + \frac{25949}{20}|x| - \frac{117131}{72}|x|^2 + \frac{2247}{2}|x|^3 - \frac{66437}{144}|x|^4 + \frac{81109}{720}|x|^5 - \frac{727}{48}|x|^6 + \frac{623}{720}|x|^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{3632}{5} - \frac{7456}{5}|x| + \frac{58786}{45}|x|^2 - 633|x|^3 + \frac{26383}{144}|x|^4 - \frac{22807}{720}|x|^5 + \frac{727}{240}|x|^6 - \frac{89}{720}|x|^7 & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (14)$$

$$\Lambda_{6,4}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{3521}{144}|x|^5 + \frac{12029}{144}|x|^6 - \frac{15617}{144}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{1015}{72}|x|^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{877}{5} + \frac{72583}{60}|x| - \frac{145467}{40}|x|^2 + \frac{18809}{3}|x|^3 - \frac{54663}{8}|x|^4 + \frac{390327}{80}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ \quad - \frac{182549}{80}|x|^6 + \frac{161777}{240}|x|^7 - \frac{1827}{16}|x|^8 + \frac{203}{24}|x|^9 & \\ 8695 - \frac{656131}{20}|x| + \frac{3938809}{72}|x|^2 - \frac{158725}{3}|x|^3 + \frac{2354569}{72}|x|^4 - \frac{9644621}{720}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ \quad + \frac{523589}{144}|x|^6 - \frac{454097}{720}|x|^7 + \frac{1015}{16}|x|^8 - \frac{203}{72}|x|^9 & \\ -\frac{142528}{5} + \frac{375344}{5}|x| - \frac{3942344}{45}|x|^2 + \frac{178394}{3}|x|^3 - \frac{931315}{36}|x|^4 + \frac{5385983}{720}|x|^5 & 3 \leq |x| < 4 \\ \quad - \frac{1035149}{720}|x|^6 + \frac{127511}{720}|x|^7 - \frac{203}{16}|x|^8 + \frac{29}{72}|x|^9 & \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (15)$$

$$\Lambda_{6,5}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{701}{8}|x|^6 + \frac{54803}{144}|x|^7 - \frac{32165}{48}|x|^8 + \frac{9555}{16}|x|^9 - \frac{38731}{144}|x|^{10} + \frac{3521}{72}|x|^{11} & 0 \leq |x| < 1 \\ 1233 - \frac{617533}{60}|x| + \frac{1544613}{40}|x|^2 - \frac{515179}{6}|x|^3 + \frac{502579}{4}|x|^4 - \frac{3809911}{30}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ \quad + \frac{3618099}{40}|x|^6 - \frac{10894163}{240}|x|^7 + \frac{251685}{16}|x|^8 - \frac{172123}{48}|x|^9 + \frac{38731}{80}|x|^{10} - \frac{3521}{120}|x|^{11} & \\ -181439 + \frac{16709441}{20}|x| - \frac{125352311}{72}|x|^2 + \frac{13002493}{6}|x|^3 - \frac{64445353}{36}|x|^4 + \frac{30912301}{30}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ \quad - \frac{3373567}{8}|x|^6 + \frac{88345523}{720}|x|^7 - \frac{1194095}{48}|x|^8 + \frac{160657}{48}|x|^9 - \frac{38731}{144}|x|^{10} + \frac{3521}{360}|x|^{11} & \\ 1188352 - \frac{19108864}{5}|x| + \frac{250837216}{45}|x|^2 - \frac{14600752}{3}|x|^3 + \frac{25437902}{9}|x|^4 - \frac{17195278}{15}|x|^5 & 3 \leq |x| < 4 \\ \quad + \frac{13253241}{40}|x|^6 - \frac{49136309}{720}|x|^7 + \frac{471205}{48}|x|^8 - \frac{45083}{48}|x|^9 + \frac{38731}{720}|x|^{10} - \frac{503}{360}|x|^{11} & \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (16)$$

$$\Lambda_{6,6}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{49}{36}|x|^2 + \frac{7}{18}|x|^4 - \frac{1}{36}|x|^6 - \frac{46109}{144}|x|^7 + \frac{81361}{48}|x|^8 - \frac{544705}{144}|x|^9 + \frac{655039}{144}|x|^{10} & 0 \leq |x| < 1 \\ \quad - \frac{223531}{72}|x|^{11} + \frac{81991}{72}|x|^{12} - \frac{6307}{36}|x|^{13} & \\ -\frac{44291}{5} + \frac{1745121}{20}|x| - \frac{15711339}{40}|x|^2 + \frac{32087377}{30}|x|^3 - \frac{7860503}{4}|x|^4 + \frac{38576524}{15}|x|^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ \quad - \frac{24659323}{10}|x|^6 + \frac{84181657}{48}|x|^7 - \frac{74009313}{80}|x|^8 + \frac{17159513}{48}|x|^9 - \frac{7870247}{80}|x|^{10} & \\ \quad + \frac{438263}{24}|x|^{11} - \frac{81991}{40}|x|^{12} + \frac{6307}{60}|x|^{13} & \\ 3905497 - \frac{424679647}{20}|x| + \frac{3822627865}{72}|x|^2 - \frac{2424839767}{30}|x|^3 + \frac{3009271097}{36}|x|^4 - \frac{930168127}{15}|x|^5 & 2 \leq |x| < 3 \\ \quad + \frac{305535494}{9}|x|^6 - \frac{9998313437}{720}|x|^7 + \frac{203720335}{48}|x|^8 - \frac{137843153}{144}|x|^9 + \frac{22300663}{144}|x|^{10} & \\ \quad - \frac{6126883}{360}|x|^{11} + \frac{81991}{72}|x|^{12} - \frac{6307}{180}|x|^{13} & \\ -\frac{255622144}{5} + \frac{971097344}{5}|x| - \frac{15295867328}{45}|x|^2 + \frac{5442932656}{15}|x|^3 - \frac{2372571796}{9}|x|^4 + \frac{2064517469}{15}|x|^5 & 3 \leq |x| < 4 \\ \quad - \frac{9563054381}{180}|x|^6 + \frac{2210666335}{144}|x|^7 - \frac{796980541}{240}|x|^8 + \frac{76474979}{144}|x|^9 - \frac{43946287}{720}|x|^{10} & \\ \quad + \frac{343721}{72}|x|^{11} - \frac{81991}{360}|x|^{12} + \frac{901}{180}|x|^{13} & \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (17)$$

$$\Lambda_{8,4}^*(x) = \begin{cases} 1 - \frac{205}{144}x^2 + \frac{91}{192}x^4 - \frac{6181}{320}x^5 + \frac{6337}{96}x^6 - \frac{2745}{32}x^7 + \frac{28909}{576}x^8 - \frac{3569}{320}x^9 & 0 \leq |x| < 1 \\ -154 + \frac{12757}{12}x - \frac{230123}{72}x^2 + \frac{264481}{48}x^3 - \frac{576499}{96}x^4 + \frac{686147}{160}x^5 & 1 \leq |x| < 2 \\ \quad - \frac{96277}{48}x^6 + \frac{14221}{24}x^7 - \frac{28909}{288}x^8 + \frac{3569}{480}x^9 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{68776}{7} - \frac{1038011}{28}x + \frac{31157515}{504}x^2 - \frac{956669}{16}x^3 + \frac{3548009}{96}x^4 - \frac{2422263}{160}x^5 & 3 \leq |x| < 4 \\ \quad + \frac{197255}{48}x^6 - \frac{19959}{28}x^7 + \frac{144545}{2016}x^8 - \frac{3569}{1120}x^9 & 4 \leq |x| < 5 \\ -56375 + \frac{8314091}{56}x - \frac{49901303}{288}x^2 + \frac{3763529}{32}x^3 - \frac{19648027}{384}x^4 + \frac{9469163}{640}x^5 & |x| \geq 5 \\ \frac{439375}{7} - \frac{64188125}{504}x + \frac{231125375}{2016}x^2 - \frac{17306975}{288}x^3 + \frac{7761805}{384}x^4 - \frac{2895587}{640}x^5 & \\ \quad + \frac{129391}{192}x^6 - \frac{259715}{4032}x^7 + \frac{28909}{8064}x^8 - \frac{3569}{40320}x^9 & \end{cases} \quad (18)$$

$$M'_8(x) = \begin{cases} \frac{5}{48}x^7 - \frac{11}{32}x^6 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{35}{24}x^2 + \frac{151}{168} & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{103}{112} - \frac{7}{30}x - \frac{7}{16}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{63}{16}x^4 - \frac{7}{3}x^5 + \frac{99}{160}x^6 - \frac{1}{16}x^7 & 1 \leq |x| < 2 \\ -\frac{139}{336} + \frac{217}{30}x - \frac{805}{48}x^2 + \frac{49}{3}x^3 - \frac{133}{16}x^4 + \frac{7}{3}x^5 - \frac{11}{32}x^6 + \frac{1}{48}x^7 & 2 \leq |x| < 3 \\ \frac{128}{21} - \frac{256}{15}x + \frac{56}{3}x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{160}x^6 - \frac{1}{336}x^7 & 3 \leq |x| < 4 \\ 0 & |x| \geq 4 \end{cases} \quad (19)$$

3 Code

y est la distance entre la particule et son plus proche point de grille, de coordonnée inférieure à la position de la particule. Les poids sont données dans l'ordre croissant des point de grille du support.

$\Lambda_{2,1}^*$

```
w[0] = (y * (y * (-y + 2.) - 1.)) / 2.
w[1] = (y * y * (3. * y - 5.) + 2.) / 2.
w[2] = (y * (y * (-3. * y + 4.) + 1.)) / 2.
w[3] = (y * y * (y - 1.)) / 2.
```

$\Lambda_{2,2}^*$

```
w[0] = (y * (y * (y * (y * (2. * y - 5.) + 3.) + 1.) - 1.)) / 2.
w[1] = (y * y * (y * (y * (-6. * y + 15.) - 9.) - 2.) + 2.) / 2.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (6. * y - 15.) + 9.) + 1.) + 1.)) / 2.
w[3] = (y * y * y * (y * (-2. * y + 5.) - 3.)) / 2.
```

$\Lambda_{2,3}^*$

```
w[0] = (y * (y * (y * y * (y * (y * (-6. * y + 21.) - 25.) + 10.) + 1.) - 1.)) / 2.
w[1] = (y * y * (y * y * (y * (y * (18. * y - 63.) + 75.) - 30.) - 2.) + 2.) / 2.
w[2] = (y * (y * (y * y * (y * (y * (-18. * y + 63.) - 75.) + 30.) + 1.) + 1.)) / 2.
w[3] = (y * y * y * y * (y * (y * (6. * y - 21.) + 25.) - 10.)) / 2.
```

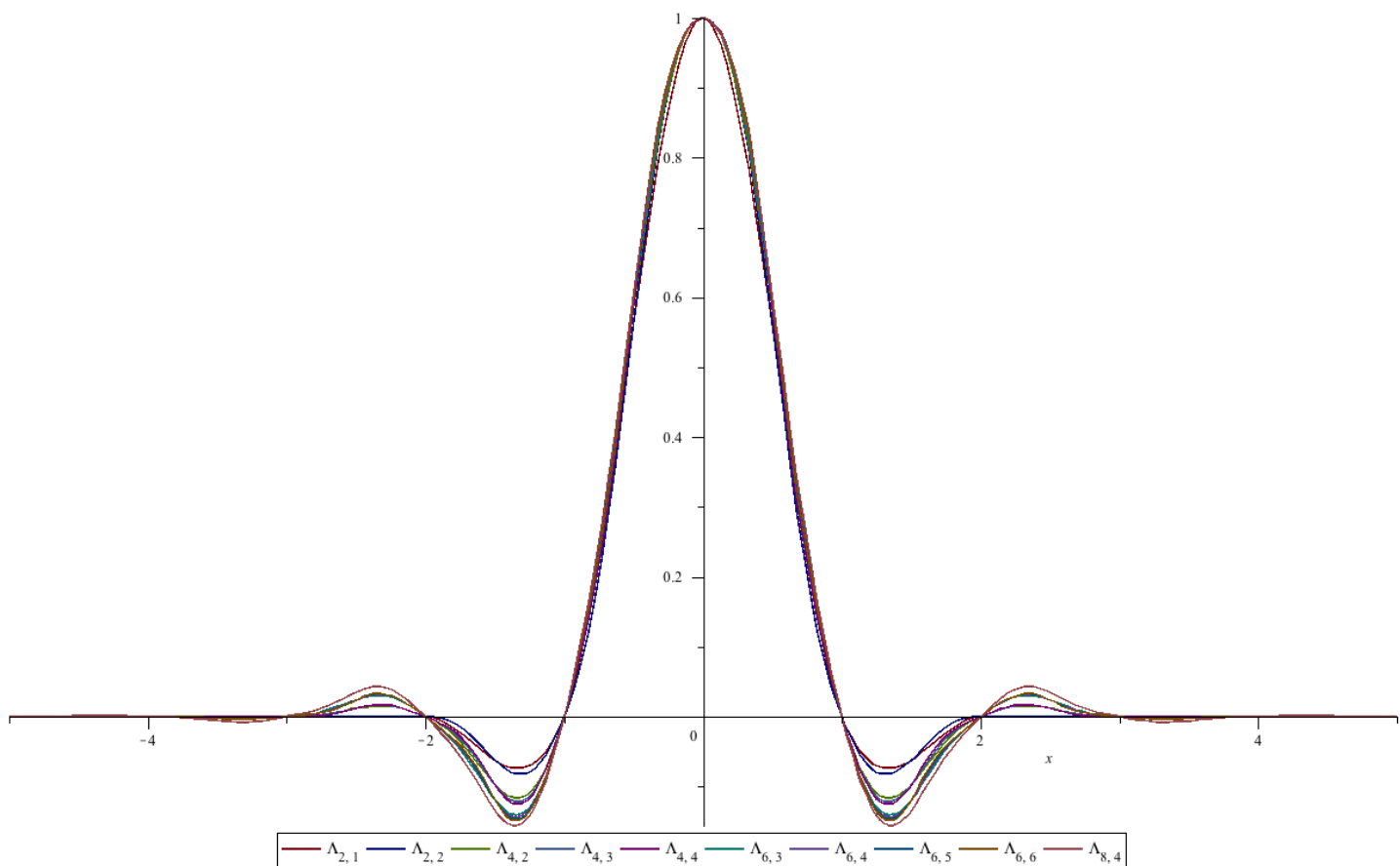


FIGURE 1: $\Lambda_{n,k}^*$

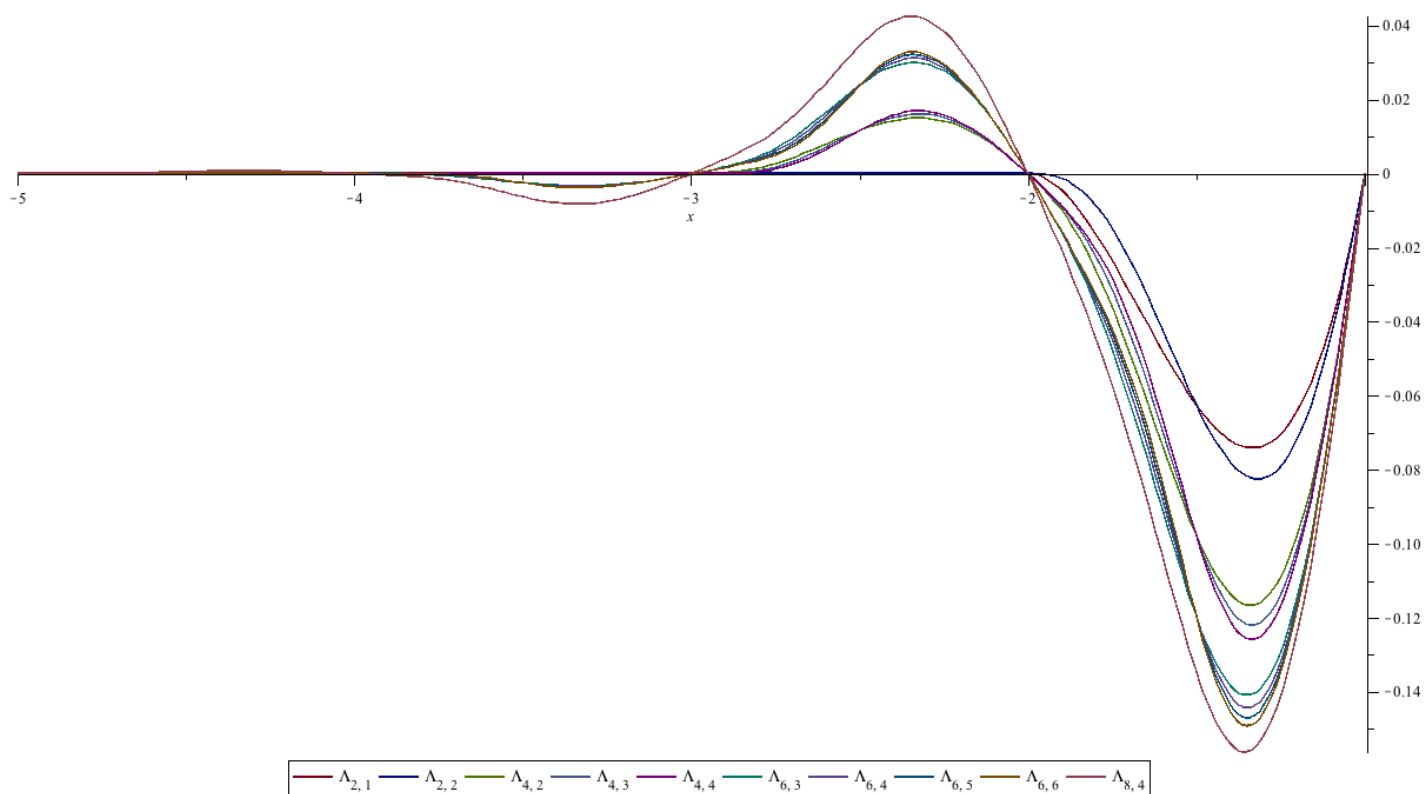


FIGURE 2: $\Lambda_{n,k}^*$, détail

$$\Lambda_{2,4}^*$$

$$\begin{aligned} w[0] &= (y * (y * (y * y * y * (y * (y * (y * (20. * y - 90.) + 154.) - 119.) + 35.) + 1.) - 1.)) / 2. \\ w[1] &= (y * y * (y * y * y * (y * (y * (y * (-60. * y + 270.) - 462.) + 357.) - 105.) - 2.) + 2.) / 2. \\ w[2] &= (y * (y * (y * y * y * (y * (y * (y * (60. * y - 270.) + 462.) - 357.) + 105.) + 1.) + 1.)) / 2. \\ w[3] &= (y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (-20. * y + 90.) - 154.) + 119.) - 35.)) / 2. \end{aligned}$$

$$\Lambda_{4,2}^*$$

$$\begin{aligned} w[0] &= (y * (y * (y * (y * (-5. * y + 13.) - 9.) - 1.) + 2.)) / 24. \\ w[1] &= (y * (y * (y * (y * (25. * y - 64.) + 39.) + 16.) - 16.)) / 24. \\ w[2] &= (y * y * (y * (y * (-50. * y + 126.) - 70.) - 30.) + 24.) / 24. \\ w[3] &= (y * (y * (y * (y * (50. * y - 124.) + 66.) + 16.) + 16.)) / 24. \\ w[4] &= (y * (y * (y * (y * (-25. * y + 61.) - 33.) - 1.) - 2.)) / 24. \\ w[5] &= (y * y * y * (y * (5. * y - 12.) + 7.)) / 24. \end{aligned}$$

$$\Lambda_{4,3}^*$$

$$\begin{aligned} w[0] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (14. * y - 49.) + 58.) - 22.) - 2.) - 1.) + 2.)) / 24. \\ w[1] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-70. * y + 245.) - 290.) + 111.) + 4.) + 16.) - 16.)) / 24. \\ w[2] &= (y * y * (y * y * (y * (y * (140. * y - 490.) + 580.) - 224.) - 30.) + 24.) / 24. \\ w[3] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-140. * y + 490.) - 580.) + 226.) - 4.) + 16.) + 16.)) / 24. \\ w[4] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (70. * y - 245.) + 290.) - 114.) + 2.) - 1.) - 2.)) / 24. \\ w[5] &= (y * y * y * y * (y * (y * (-14. * y + 49.) - 58.) + 23.)) / 24. \end{aligned}$$

$$\Lambda_{4,4}^*$$

$$\begin{aligned} w[0] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-46. * y + 207.) - 354.) + 273.) - 80.) + 1.) - 2.) \\ &\quad - 1.) + 2.)) / 24. \\ w[1] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (230. * y - 1035.) + 1770.) - 1365.) + 400.) - 4.) + 4.) \\ &\quad + 16.) - 16.)) / 24. \\ w[2] &= (y * y * (y * y * (y * (y * (y * (y * (-460. * y + 2070.) - 3540.) + 2730.) - 800.) + 6.) - 30.) \\ &\quad + 24.) / 24. \\ w[3] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (460. * y - 2070.) + 3540.) - 2730.) + 800.) - 4.) - 4.) \\ &\quad + 16.) + 16.)) / 24. \\ w[4] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-230. * y + 1035.) - 1770.) + 1365.) - 400.) + 1.) + 2.) \\ &\quad - 1.) - 2.)) / 24. \\ w[5] &= (y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (46. * y - 207.) + 354.) - 273.) + 80.)) / 24. \end{aligned}$$

$$\Lambda_{6,3}^*$$

$$\begin{aligned} w[0] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-89. * y + 312.) - 370.) + 140.) + 15.) + 4.) - 12.)) / 720. \\ w[1] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (623. * y - 2183.) + 2581.) - 955.) - 120.) - 54.) + 108.)) / 720. \\ w[2] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-1869. * y + 6546.) - 7722.) + 2850.) + 195.) + 540.) - 540.)) / 720. \\ w[3] &= (y * y * (y * y * (y * (y * (3115. * y - 10905.) + 12845.) - 4795.) - 980.) + 720.) / 720. \\ w[4] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-3115. * y + 10900.) - 12830.) + 4880.) - 195.) + 540.) + 540.)) / 720. \\ w[5] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (1869. * y - 6537.) + 7695.) - 2985.) + 120.) - 54.) - 108.)) / 720. \\ w[6] &= (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-623. * y + 2178.) - 2566.) + 1010.) - 15.) + 4.) + 12.)) / 720. \\ w[7] &= (y * y * y * y * (y * (y * (89. * y - 311.) + 367.) - 145.)) / 720. \end{aligned}$$

$\Lambda_{6,4}^*$

w[0] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (290. * y - 1305.) + 2231.) - 1718.) + 500.) - 5.) + 15.) + 4.) - 12.)) / 720.
w[1] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-2030. * y + 9135.) - 15617.) + 12027.) - 3509.) + 60.) - 120.) - 54.) + 108.)) / 720.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (6090. * y - 27405.) + 46851.) - 36084.) + 10548.) - 195.) + 195.) + 540.) - 540.)) / 720.
w[3] = (y * y * (y * y * (y * (y * (y * (y * (-10150. * y + 45675.) - 78085.) + 60145.) - 17605.) + 280.) - 980.) + 720.) / 720.
w[4] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (10150. * y - 45675.) + 78085.) - 60150.) + 17620.) - 195.) - 195.) + 540.) + 540.)) / 720.
w[5] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-6090. * y + 27405.) - 46851.) + 36093.) - 10575.) + 60.) + 120.) - 54.) - 108.)) / 720.
w[6] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (2030. * y - 9135.) + 15617.) - 12032.) + 3524.) - 5.) - 15.) + 4.) + 12.)) / 720.
w[7] = (y * y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (-290. * y + 1305.) - 2231.) + 1719.) - 503.)) / 720.

$\Lambda_{6,5}^*$

w[0] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-1006. * y + 5533.) - 12285.) + 13785.) - 7829.) + 1803.) - 3.) - 5.) + 15.) + 4.) - 12.)) / 720.
w[1] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (7042. * y - 38731.) + 85995.) - 96495.) + 54803.) - 12620.) + 12.) + 60.) - 120.) - 54.) + 108.)) / 720.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-21126. * y + 116193.) - 257985.) + 289485.) - 164409.) + 37857.) - 15.) - 195.) + 195.) + 540.) - 540.)) / 720.
w[3] = (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (35210. * y - 193655.) + 429975.) - 482475.) + 274015.) - 63090.) + 280.) - 980.) + 720.) / 720.
w[4] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-35210. * y + 193655.) - 429975.) + 482475.) - 274015.) + 63085.) + 15.) - 195.) - 195.) + 540.) + 540.)) / 720.
w[5] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (21126. * y - 116193.) + 257985.) - 289485.) + 164409.) - 37848.) - 12.) + 60.) + 120.) - 54.) - 108.)) / 720.
w[6] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-7042. * y + 38731.) - 85995.) + 96495.) - 54803.) + 12615.) + 3.) - 5.) - 15.) + 4.) + 12.)) / 720.
w[7] = (y * y * y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (y * (1006. * y - 5533.) + 12285.) - 13785.) + 7829.) - 1802.)) / 720.

$\Lambda_{6,6}^*$

w[0] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (3604. * y - 23426.) + 63866.) - 93577.) + 77815.) - 34869.) + 6587.) + 1.) - 3.) - 5.) + 15.) + 4.) - 12.)) / 720.
w[1] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-25228. * y + 163982.) - 447062.) + 655039.) - 544705.) + 244083.) - 46109.) - 6.) + 12.) + 60.) - 120.) - 54.) + 108.)) / 720.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (75684. * y - 491946.) + 1341186.) - 1965117.) + 1634115.) - 732249.) + 138327.) + 15.) - 15.) - 195.) + 195.) + 540.) - 540.)) / 720.
w[3] = (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (y * y * (-126140. * y + 819910.) - 2235310.) + 3275195.) - 2723525.) + 1220415.) - 230545.) - 20.) + 280.) - 980.) + 720.) / 720.
w[4] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (126140. * y - 819910.) + 2235310.) - 3275195.) + 2723525.) - 1220415.) + 230545.) + 15.) + 15.) - 195.) - 195.) + 540.) + 540.)) / 720.
w[5] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-75684. * y + 491946.) - 1341186.) + 1965117.) - 1634115.) + 732249.) - 138327.) - 6.) - 12.) + 60.) + 120.) - 54.) - 108.)) / 720.
w[6] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (25228. * y - 163982.) + 447062.) - 655039.) + 544705.) - 244083.) + 46109.) + 1.) + 3.) - 5.) - 15.) + 4.) + 12.)) / 720.
w[7] = (y * y * y * y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (y * (y * (-3604. * y + 23426.) - 63866.) + 93577.) - 77815.) + 34869.) - 6587.)) / 720.

$\Lambda_{8,4}^*$

```
w[0] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-3569. * y + 16061.) - 27454.) + 21126.) - 6125.)
+ 49.) - 196.) - 36.) + 144.)) / 40320.
w[1] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (32121. * y - 144548.) + 247074.) - 190092.)
+ 55125.) - 672.) + 2016.) + 512.) - 1536.)) / 40320.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-128484. * y + 578188.) - 988256.) + 760312.)
- 221060.) + 4732.) - 9464.) - 4032.) + 8064.)) / 40320.
w[3] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (299796. * y - 1349096.) + 2305856.) - 1774136.)
+ 517580.) - 13664.) + 13664.) + 32256.) - 32256.)) / 40320.
w[4] = (y * y * (y * y * (y * (y * (y * (y * (-449694. * y + 2023630.) - 3458700.) + 2661540.)
- 778806.) + 19110.) - 57400.) + 40320.) / 40320.
w[5] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (449694. * y - 2023616.) + 3458644.) - 2662016.)
+ 780430.) - 13664.) - 13664.) + 32256.) + 32256.)) / 40320.
w[6] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-299796. * y + 1349068.) - 2305744.) + 1775032.)
- 520660.) + 4732.) + 9464.) - 4032.) - 8064.)) / 40320.
w[7] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (128484. * y - 578168.) + 988176.) - 760872.)
+ 223020.) - 672.) - 2016.) + 512.) + 1536.)) / 40320.
w[8] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-32121. * y + 144541.) - 247046.) + 190246.)
- 55685.) + 49.) + 196.) - 36.) - 144.)) / 40320.
w[9] = (y * y * y * y * y * y * (y * (y * (y * (3569. * y - 16060.) + 27450.) - 21140.) + 6181.)) / 40320.
```

M'_8

```
w[0] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-10. * y + 21.) + 28.) - 105.) + 70.) + 35.) - 56.) + 17.) / 3360.
w[1] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (70. * y - 175.) - 140.) + 770.) - 560.) - 350.) + 504.) - 102.) / 3360.
w[2] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-210. * y + 609.) + 224.) - 2135.) + 910.) + 2765.) - 2520.) + 255.) / 3360.
w[3] = (y * y * (y * y * (y * y * (350. * y - 1155.) + 2940.) - 4900.) + 3020.) / 3360.
w[4] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-350. * y + 1295.) - 420.) - 2135.) - 910.) + 2765.) + 2520.) + 255.) / 3360.
w[5] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (210. * y - 861.) + 532.) + 770.) + 560.) - 350.) - 504.) - 102.) / 3360.
w[6] = (y * (y * (y * (y * (y * (y * (-70. * y + 315.) - 280.) - 105.) - 70.) + 35.) + 56.) + 17.) / 3360.
w[7] = (y * y * y * y * y * y * (y * (10. * y - 49.) + 56.)) / 3360.
```

4 Formules avec diffusion

		Moments	Régularité	Nb points	Degré	Support	Temps (python)
$\tilde{\Lambda}_{2,1}^* \sim \Lambda_{2,1}^* + \text{diffusion}$	(25)	2	C^1	4	3	$[-2; 2]$	
$\tilde{\Lambda}_{2,2}^* \sim \Lambda_{2,2}^* + \text{diffusion}$	(26)	2	C^2	4	5	$[-2; 2]$	

TABLE 2: Caractéristiques des formules de remaillage avec diffusion

On pose $f = \frac{vdt}{dx^2}$. Les contraintes sont modifiées pour dépendre de f (la symétrie et la régularité de la fonction restent inchangées) :

– Conservation des moments discrets :

$$\sum_{l=-2}^2 l^q \tilde{\Lambda}_{2,k}^*(s-l) = \begin{cases} s^q + 2f & \text{si } q = 2 \\ s^q & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 < s < 1, q = 0, \dots, 2 \quad (20)$$

– Diffusion nulle :

$$\tilde{\Lambda}_{2,k}^*(x) \Big|_{f=0} = \Lambda_{2,k}^*(x) \quad (21)$$

Sous l'hypothèse de dépendance linéaire en f , les polynômes définissant la formule avec diffusion sont pris de la forme :

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} (c_{i,j} + f\tilde{c}_{i,j})x^j, \quad i = 0, \dots, n/2 + 1 \quad (22)$$

Les coefficients $c_{i,j}$ sont les coefficient obtenus pour la formule sans diffusion, reste à déterminer les $\tilde{c}_{i,j}$.

Remarque 1 : les moments continus deviennent :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^q \tilde{\Lambda}_{2,k}^*(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ 2f & \text{si } q = 2, \quad q = 0, \dots, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (23)$$

Remarque 2 : l'exactitude aux points de coordonnées entières devient :

$$\tilde{\Lambda}_{2,k}^*(i) = \begin{cases} 1 - 2f & \text{si } i = 0 \\ f & \text{si } i = -1, \quad i = -2, \dots, 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (24)$$

On obtient les formules suivantes :

$$\tilde{\Lambda}_{2,1}^*(x) = \begin{cases} 1 - 2f + (-\frac{5}{2} + 9f)|x|^2 - (-\frac{3}{2} + 6f)|x|^3 & 0 \leq |x| < 1 \\ 2 - 4f - (4 - 12f)|x| + (\frac{5}{2} - 9f)|x|^2 - (\frac{1}{2} - 2f)|x|^3 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (25)$$

```
w[0] = f + (-1 + (2 - 6 * f + (-1 + 4 * f) * y) * y) * y / 2;
w[1] = 1 - 2 * f + (-5 + 18 * f + (3 - 12 * f) * y) * y * y / 2;
w[2] = f + (1 + (4 - 18 * f + (-3 + 12 * f) * y) * y) * y / 2;
w[3] = (-1 + 6 * f + (1 - 4 * f) * y) * y * y / 2;
```

$$\tilde{\Lambda}_{2,2}^*(x) = \begin{cases} 1 - 2f - x^2 - (\frac{9}{2} - 30f)x^3 + (\frac{15}{2} - 45f)x^4 - (3 - 18f)x^5 & 0 \leq |x| < 1 \\ -4 + 32f - (-18 + 120f)x + (-29 + 180f)x^2 - (-\frac{43}{2} + 130f)x^3 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (26)$$

```
w[0] = f + (-1 + (1 + (-20 * f + 3 + (30 * f - 5 + (2 - 12 * f) * y) * y) * y) * y) * y / 2;
w[1] = 1 - 2 * f + (-2 + (-9 + 60 * f + (15 - 90 * f + (-6 + 36 * f) * y) * y) * y) * y * y / 2;
w[2] = f + (1 + (1 + (-60 * f + 9 + (90 * f - 15 + (-36 * f + 6) * y) * y) * y) * y) * y / 2;
w[3] = (20 * f - 3 + (-30 * f + 5 + (12 * f - 2) * y) * y) * y * y * y / 2;
```

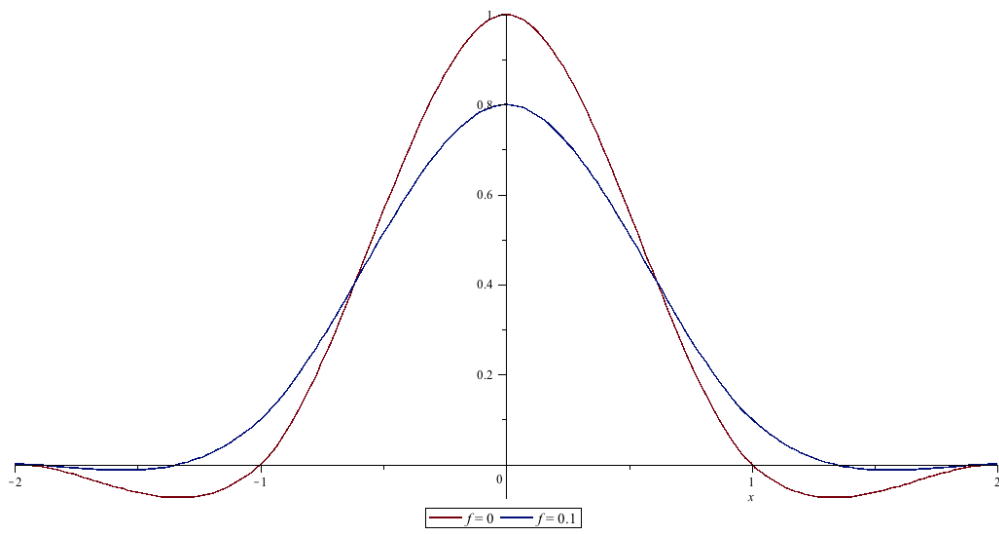


FIGURE 3: $\tilde{\Lambda}_{2,1}^*$

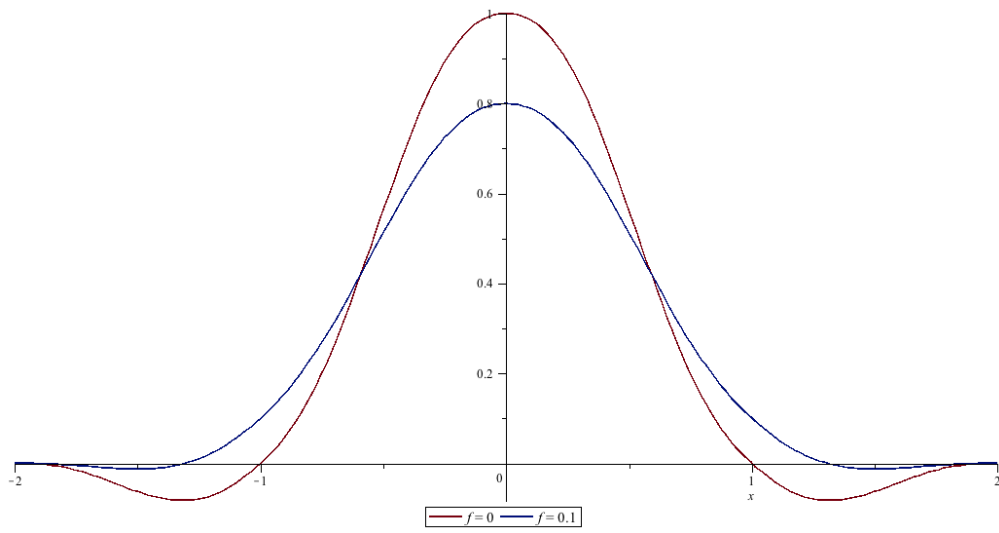


FIGURE 4: $\tilde{\Lambda}_{2,2}^*$